F 1509/14

R

46/47. 1984/1985

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

1988 -03- 21

SERIA MECANICĂ

TOMUL XLVI – XLVII 1984 – 1985

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*
MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan*; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. docent *Felicia Cornea*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. docent *Traian Demian*; Prof. dr. ing. *Gleb Dăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Horlopan*; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu*; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu*; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț*; Prof. dr. docent *Florea Oprea*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Mircea Postelnicescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *George Rulea*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through
ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378
Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

C. Udrişte

Funcţii convexe pe varietăţi şi subvarietăţi riemanniene 8

Tatiana Stănăşilă

Asupra funcţiilor algebrice aleatoare 16

I. M. Popescu, Mihaela Dumitru, P. Sterian

Studiul toretic al limitei bistabilitate-autofocalizare în materiale cu proprietăţi optice neliniare 21

T. Demian, A. Pascu

Calculul şi proiectarea lagărelor cu gaze pentru aparate (l. franceză) 28

B. Grünwald, N. Apostolescu, C. Pană, N. Negurescu, M. Popa, D. Nedelcu, V. Gheorghiu, B. Radu

Aspecte de ordin cinetic şi fizic ale arderii emulsiilor de metanol-motorină în motorul diesel funcţionînd după procedeul „M" 33

N. Pănoiu, L. Mihăescu, I. Oprea

Aspecte ale introducerii morilor ventilator la măcinarea materialelor nemetalifere (creţa şi argila) 42

T. Demian, A. Pascu, V. Postelnicu

Asupra realizării lagărelor autoportante plane cu canale spirale pentru aparate 49

D. Taraza

Ciclul Carnot ca ciclu posibil pentru un motor termic (l. engleză) 53

M. Radeş

Asupra unei probleme de valori proprii dependente de frecvenţă şi utilizării ei la modelarea structurală (l. engleză) 64

T. Demian, O. Donţu

Asupra durificării superficiale locale cu laser pentru elemente constructive de mecanică fină 70

Gh. Popescu, Al. Arhip, Al. Dănescu, S. Petrescu, V. Radcenco

Contribuţii la studiul comportării maşinilor termice cu ciclu regenerativ de tip Stirling utilizînd ca agent de lucru un amestec binar bifazic 74

Şt. Staicu

O generalizare a teoriei lui Huygens asupra variaţiei tensorului de inerţie . . . 92

1504

BUDAPESTI MŰSZAKI 1848

M. Munteanu

Dinamica mașinilor vibratoare monomasice montate pe suporți elastici. Cazul general (I. engleză) 96

T. Popescu, L. Mihăescu, N. Pănoiu, I. Oprea

Inlocuirea păcurii prin valorificarea combustibililor solizi la o platformă industrială chimică (UVCP) de la Combinatul chimic Tn. Măgurele) 111

C. Stănescu, Maria Petrescu, C. Petrescu

Contribuții teoretice asupra sintezei optime a mecanismului de formare prin tragere (I. franceză) 119

N. Pandrea

Asupra unor proprietăți cinematice ale rigidului cu punct fix 130

S. Minuculescu

Un studiu al coeficientului de debit pentru condițiile particulare curgerii în procesele de schimb de gaze la supape 139

C. Neaga

Instalația de pregătire a prafului de lignit cu buncăr intermediar semideschisă— o soluție pentru eliminarea hidrocarburilor folosite combustibil suport 149

Gh. Hobeanu

Studiul mișcării unui rotor cu arbore elastic la trecerea nestaționară prin turația critică 155

T. Turcoiu

O modalitate de estimare a durabilității pieselor în frecare la motoarele cu ardere internă de concepție nouă 163

R. Iatan, Mihaela Păunescu, C. Tacă

Asupra concentrării de tensiuni în zona de îmbinare a două virole cilindrice cu abateri de formă 170

C. Nedelcu, N. Apostolescu

Cercetări experimentale ale emulsiei motorină-metanol, preparate de instalația de alimentare a unui motor diesel 179

O. Donțu, I. Guțu, I. Dinculescu

Unele aspecte privind durificarea superficială cu radiații emise de o instalație laser CO_2 pentru piese de mecanică fină 186

S. Minculescu

Un model fizico-matematic al curegrii între atmosferă și cilindrul unui motor cu ardere internă, cu considerarea fenomenelor dinamice care apar 190

Summary

C. Udrişte

Convex Functions on Riemannian Manifolds and Submanifolds 8

Tatiana Stănăşilă

On the Random Algebraic Functions 16

I. M. Popescu, Mihaela Dumitru, P. Sterian

The Theoretical Study of the Bistability Self-Focusing Limit in Materials with Nonlinear Optical Properties 21

T. Demian, A. Pascu

Calculation and Design of Gas Bearings for Apparatus 28

B. Grünwald, N. Apostolescu, C. Pană, N. Negurescu, M. Popa, C. Nedelcu, V. Gheorghiu, B. Radu

Kinetical and Physical Aspects of the Methanol-Gas Oil Emulsions Combustion in a M-Diesel Engine 33

N. Pănoiu, L. Mihăescu, I. Oprea

Aspects of Introducing Fan Mills for Crushing Nonmetalliferous Materials . . 42

T. Demian, A. Pascu, V. Postelnicu

Spiral Grooves Making for a Self-Acting Gas Bearing 49

D. Taraza

The Carnot Cycle as a Possible Cycle for a Practical Engine 53

M. Radeş

On a Frequency Dependent Eigenproblem and Its Use in Structural Modelling 64

T. Demian, O. Donţu

On Laser Local Superficial Hardness for Constructive Elements 70

Gh. Popescu, Al. Arhip, Al. Dănescu, S. Petrescu, V. Radcenco

Contributions on the Study of the Thermal Engines with Stirling Regenerative Cycle with a Two-Phase-Components Working Fluid 74

St. Staicu

A Generalization of Huygens' Theory on the Inertial Tensor Variation 92

M. Munteanu

Dynamics of Single-Mass Vibrating Machines Mounted on Elastic Supports. . . 96

T. Popescu, L. Mihăescu, N. Pănoiu, I. Oprea

The Replacement of Black Oil by Turning to Account of Solid Fuels 111

C. Stănescu, Maria Petrescu, C. Petrescu

Theoretical Considerations about the Optimal Synthesis of the Forming through Pulling Mechanism 119

N. Pandrea

On Some Kinetic Properties of the Rigid about a Fixed Point 130

S. Minuculescu

A Study of the Flow Coefficient in Particular Cases on Inlet and Exhaust Valves 139

C. Neaga

Installation for Preparation of Lignite Powder 149

Gh. Hobeanu

Rotor with Elastic Shaft Mouving Analysis when Passing through the Critical Speed 155

T. Turcoiu

A Modality of Estimation to Length of Life of the Pieces in the Friction at the New Conception Internal Combustion Engines 163

R. Iatan, Mihaela Păunescu, D. Tacă

On Stress Concentration in the Jointing Zone of Two Cylindrical Shells Presenting Shape Imperfections 170

D. Nedelcu, N. Apostolescu

Experimental Study of the Methanol-in-Gasoil Emulsion Prepared by the Fueling System of a Diesel Engine 179

O. Donţu, I. Guţu, I. Dinculescu

Some Aspects on Superficial Hardening with Radiations 186

S. Minculescu

A Gas Flow Model Considering Wave Propagation in I. C. Engine Intake System 190

SCIENTIFIC RESEARCH IN THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF BUCHAREST

With its 26.500 undergraduates and Ph.D students, as well as 1 500 teaching staff working in 12 faculties and 55 departments, the Polytechnic Institute of Bucharest has always been the largest higher education institution in Romania. In fact, from the first engineering courses taught in Romanian, organized in 1818 by the scholar Gheorghe Lazăr, the long succession of engineering schools and of their graduates has only confirmed the technical capacity and inclination of our country and its capital. The distance covered from the former National School of Bridges and Roads, which celebrated its centenary in 1981, to the present day citadel, can be viewed as the ascending line joining aspiration to fulfilment. The admiration for their brilliant forerunners is a strong incentive to present day disciples to rise to the challenge of the contemporary technical and scientific revolution.

The novel, revolutionary principle of the integration of education with research and production, worked out by Comrade Nicolae Ceaușescu, the president of our country, underlies the whole process of education and training our students for work, through work.

The necessary blending of scientific creation and industrial production in the education and training of engineers has been generalized notionwide, in keeping wiht the provisions of the laws in force at present. A wide spectrum training of specialist enables them to cope with the problems raised every day by the information explosion and the spectacular changes in the national economy. Thus, in the last few years only, new educational structures have been set up directly in response to the demands made by industry. This has resulted in the emergence of new lines of specialization such as : production of coke and coal products special purpose metallurgical products, robotics, biochemistry, chemical equipment and engineering, welding technology and equipment, etc.

Professors and students are directly involved together with specialists from research and industry in the solution of highly important problems such as : mechanization and automation of operations in hot sections, widening of the range of materials used in microelectronics, nuclear power engineering and aeronautics, development of high performance machines, of control and computer equipment, of industrial robots etc.

The main targets of research, as well as of design and microproduction activities in different engineering fields focus on topics put forward by our economy, which require the setting up of joint teams of specialists from different fields, who will follow up the respective project until it is actually applied in industry. The Polytechnic teaching staff and students have worked on many such important projects, for example: integrated circuit grids, aluminium and gold wire drawing technologies, high speed steels with low contents of expensive or scarce elements, titan and zirconium alloys used in nuclear power engineering, technologies used to obtain high purity chemical

compounds, the study of the processes involved in starting synchronous motors driving turbocompressors, the reduction of energy consumption in pumping stations used for irrigations of hydrotransport in mines, control systems for industrial robots, new technologies for electronic components and devices, techniques to eliminate hydrocarbon addition by coal gasification used to sustain combustion in burning bituminous schists, design of special machine-tools, new technologies and modulated devices for high quality processing and testing, high performance farming equipment, production of synthetic elastomers by open ring polymerization of cyclopentadiene, microcomputers, microwave digital relays, interactive graphical systems for computer aided design, etc.

In embarking upon the solution of high priority projects required by the national economy, research teams start from the topics included in the national plan for scientific research, technological development and the implementation of technical and scientific progress, coordinated by the National Council for Science and Technology, led by academician Elena Ceaușescu, BSc, PhD, vice-prime minister of the government and brilliant, world famous scientist. At the same time, long term fundamental research is encouraged in order to carry on and develop lines of research already pursued in our institute for a long time.

The Polytechnic Institute has greatly contributed to industrial development through research and the design of computing equipment, of different devices and installations. But of the various products being manufactured at present or just taken over by industry mention can be made of traffic monitoring equipment, M 18, M 118 and M 216 microcomputers, AMIC and Personal microcomputers, equipment for psychotechnical investigations, complex installations for poultry batteries, the DIALISP artificial intelligence machine, the DELTA microwave digital relay and many others. Of significant importance is the design and construction of an automatie line for chill casting, of test stands, sugar diffusion installations, technological aggregates, industrial robots, dimensional control devices, measuring and control equipment, etc.

The Polytechnic Institute is the organizer of a large number of national and international scientific meetings, a few of the most recent being The National Conference on Power Engineering, The Vth National Conference on Industrial Automatic and Information Systems, The 3rd Symposium on Microwave Technology, The 2nd Colloquium on Water Treatment Equipment, The Symposium on Electrical Machines Associated with Static Converters, The Vth National Conference on Machine-Tools, The IIIrd National Conference on Precision Mechanics, The National Conference on Chemistry and Chemical Engineering, The IIIrd National Symposium on Industrial Robots.

In the last three years, 110 teaching staff and 60 foreign citizens have been awarded doctoral degrees in the Polytechnic, in one of the 50 specialities listed for this degree.

By dealing with a wide range of problems, the scientific work carried on in the Polytechnic is an active factor in the promotion of scientific progress in our country. The importance of the part played by our teaching staff in the solution of research projects stemming from economic requirements is reflected in the 600 contract-based projects completed in 1984 alone.

The Polytechnic Bulletin is published yearly in 9 different issues: Electrical Engineering, Electronics, Control Engineering and Computers, Power Engineering, Mechanics, Machine Construction, Transport-Aerospace Engineering, Chemistry, Metallurgy, which are a sequel to the old periodicals: "Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", "Bulletin of the Polytechnic of Bucharest" and "Bulletin of the Gheorghe Gheorghiu-Dej Polytechnic of Bucharest". Among the contributors to the first issue in 1929 are Dan Barbilian, Elie Carafoli, Grigore Moisil, Octav Onicescu, Dimitrie Pompeiu, Gheorghe Ţiţeica, C. Vasilescu-Karpen.

The materials published in the Bulletin derive, first of all, from the results of the research carried out by the teaching staff of the Polytechnic, in collaboration with specialists from research institutes, from industry or from different scientific institutions. The students research papers are published side by side with those of their professors or of foreign academics. Complete collections of the Bulletin of the Polytechnic Institute of Bucharest exist both in our country and in well known foreign institutions, which testifies to the interest it anrises at home and abroad. It is our hope that this interest will continue to grow in the future.

prof. Voicu Tache, MSc. Ph. D
Rector of the Polytechnic Institute of Bucharest

C.Z. : 517. 566. 3

FUNCȚII CONVEXE PE VARIETĂȚI ȘI SUBVARIETĂȚI RIEMANNIENE

C. UDRIȘTE *

§ 1 prezintă : (1) relația dintre gradientul unei funcții pe o varietate riemanniană N și gradientul restricției acestei funcții la o subvarietate riemanniană $M \subset N$, (2) relația dintre hessiana unei funcții pe o varietate riemaniană N și hessiana restricției acestei funcții la o subvarietate riemanniană $M \subset N$, (3) consecințe impuse de aceste relații. § 2 demonstrează proprietăți ale hipersuprafețelor de nivel într-o varietate riemanniană. § 3 arată că fibratul tangent al unei varietăți riemanniene admite o funcție convexă, și anume funcția energie asociată structurii riemanniene, și descrie unele consecințe ale acestui fapt. § 4 formulează patru probleme deschise : (1) Studiul diferitelor tipuri de convexitate și a legăturilor dintre ele, pe o varietate riemanniană (2) Cercetarea schimbărilor de metrică riemanniană (sau de conexiune riemanniană) care conservă convexitatea unei funcții date (3) Se poate extinde noțiunea de funcție conjugată la cazul varietăților riemanniene? (4) O demonstrație potrivită pentru faptul că o funcție convexă de clasă C^1 pe o varietate riemanniană completă cu volum finit este o constantă.

§ 1. *Gradientul și hessiana.* Fie (N, g) o varietate riemanniană de dimensiune $n + p$ și M o subvarietate a sa de dimensiune n a cărei metrică riemanniană (indusă) o notăm tot cu g. Notăm cu $\xi_1, \ldots, \xi_p$ cîmpurile vectoriale locale normale la M pe care le presupunem ortonormate. Dacă ∇' este conexiunea riemanniană pe N și ∇ conexiunea riemanniană pe M, atunci are loc formula Gauss

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

unde X și Y sînt cîmpuri vectoriale tangente la M, iar $\alpha(X, Y) = \sum_{s=1}^{p} \Omega^s(X, Y)\xi_s$ este a doua formă fundamentală a lui M.

Fie funcția reală $f : N \to R$ pe care o presupunem de clasă cel puțin C^2. Restricția lui f la M o notăm f_M. Se observă că

$$\operatorname{grad}_N f = \operatorname{grad}_M f_M + \sum_{s=1}^{p} a^s \xi_s, \text{ unde}$$

$$a^s = g(\operatorname{grad}_N f, \xi_s) = \mathrm{d}f(\xi_s).$$

---

* Conf. dr., catedra Matematici I

Astfel devine evident că dacă $x_0 \in N$ este un punct critic al lui f şi dacă $x_0 \in M$, atunci x_0 este un punct critic al lui f_M. De asemenea se observă că $x_0 \in M$ este un punct critic al lui f_M dacă şi numai dacă

$$\operatorname{grad}_N f(x_0) = \sum_{s=1}^{p} a^s(x_0)\, \xi_s(x_0) \in T_x M \ .$$

1. *Teoremă*. Dacă $f : N \to R$ este o funcţie de clasă C^2 şi f_M este restricţia ei la M, atunci

$$\operatorname{Hess}_N f(X, Y) = \operatorname{Hess}_M f_M(X, Y) - \mathrm{d}f(\alpha(X, Y))$$

pentru orice cîmpuri vectoriale X, Y tangente la M.

Demonstraţie. Ţinînd seama de definiţia hessianei şi de formula Gauss găsim

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}_N f(X, Y) &= \nabla'_X(\nabla'_Y f) - (\nabla'_X Y)(f) = \\ &= \nabla_X(\nabla_Y f) - (\nabla_X Y)(f) - \alpha(X, Y)(f) = \\ &= \operatorname{Hess}_M f_M(X, Y) - \mathrm{d}f(\alpha(X, Y)).\end{aligned}$$

2. *Observaţie.* Considerăm oportun să reproducem şi calculele în coordonate locale. Fie $(y^1, \ldots, y^{n+p})$ coordonatele unui punct din N şi $(x^1, \ldots, x^n)$ coordonatele unui punct din M. Deoarece formula Gauss se scrie

$$y^\alpha_{,ij} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\gamma \end{matrix} \right\} y^\mu_{,i}\, y^\gamma_{,j} = \sum_s \Omega^s_{ij}\, \xi^\alpha_s, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\alpha, \beta, \mu, \gamma = 1, \ldots, n + p$$

$$s = 1, \ldots, p$$

găsim

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\, y^\alpha_{,i}, \; f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\, y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\, y^\alpha_{,ij} =$$

$$= f_{,\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \sum_s \Omega^s_{ij} \xi^\alpha_s .$$

De asemenea reamintim că o funcţie reală de clasă C^2 pe o varietate riemanniană completă este convexă dacă şi numai dacă hessiana ei este pozitiv semidefinită.

3. *Consecinţe.* Presupunem că N şi M sînt varietăţi conexe şi complete.

(1) Dacă $f : N \to R$ este convexă şi $\operatorname{grad}_N f$ este tangent la M, atunci f_M este convexă.

(2) Dacă $f : N \to R$ este convexă şi M este o subvarietate total geodezică, atunci f_M este convexă.

(3) Dacă $f : N \to R$ este convexă şi $df(\alpha)$ este pozitiv semidefinită atunci f_M este convexă.

Demonstraţie. (1) Relaţiile $df(\xi_s) = 0$, $s = 1, \ldots, p$ implică $df(\alpha) = 0$ şi deci $\mathrm{Hess}_N f = \mathrm{Hess}_M f_M$.

(2) Prin ipoteză $\alpha = 0$ şi deci $\mathrm{Hess}_N f = \mathrm{Hess}_M f$. Facem însă observaţia că în acest caz din completitudinea lui N rezultă completitudinea lui M.

$$(3)\quad \mathrm{Hess}_M f_M = \mathrm{Hess}_N f + df(\alpha).$$

Exemple. (1) Funcţia $f : R^3 \to R$, $f(x, y, z) = e^z$ este convexă pe R^3 şi grad $f = (0, 0, e^z)$. Fie $M : x^2 + y^2 = 1$ cilindrul circular drept din R^3. Cîmpul vectorial unitar normal la cilindru este $\xi = (x, y, 0)$. Se observă că $(\xi., \text{grad } f) = 0$ şi deci f_M este convexă.

(2) Vezi cazul fibratului tangent prezentat mai jos.

(3) Fie $f : R^3 \to \mathrm{R}$, $f(x, y, z) = e^z$ şi $M : z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

Deoarece $df = e^z\, dz$, $\xi = \dfrac{(-x, -y, 1)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $\Omega = \dfrac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ rezultă

$$df(\xi) = \frac{e^z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \text{ şi } \mathrm{Hess}_M f_M = \mathrm{Hess}_{R^3} f + df(\xi)\Omega = e^z\, dz^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Deci f_M este convexă.

(4) Funcţia $f : R^3 \to R$, $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ este convexă pe R^3.

Considerăm paraboloidul de rotaţie $M : z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, orientat prin $\xi = \dfrac{(-x, -y, 1)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, pentru care a doua formă fundamentală este $\Omega = \dfrac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$. Rezultă $\mathrm{Hess}_M f_M = \mathrm{Hess}_{R^3} f + df(\xi)\,\Omega = \dfrac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$ şi deci f_M este convexă. Evident condiţia ca f să fie convexă pe R^3 nu este necesară.

Generalizare. Dacă $f : R^2 \to R$ este convexă, atunci $\tilde{f} : R^3 \to R$, $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y)$ este convexă. Restricţia lui $\tilde{f}$ la graficul lui f este de asemenea convexă.

4. *Consecinţă.* Fie N o varietate riemanniană completă şi M o subvarietate completă cu volum finit (în particular compactă). Dacă $f : N \to R$ este convexă şi $f_M \neq \text{const}$, atunci $df(\alpha)$ nu este pozitiv semidefinită.

Demonstraţie. Pe varietăţile complete cu volum finit nu există funcţii convexe diferite de constante [1], [14]. De aceea, dacă $df(\alpha)$ ar fi pozitiv definită, atunci ar rezulta $f_M = \text{const}$, ceea ce contrazice ipoteza. Rămîne că există un punct $x \in M$ şi un vector X_x tangent la M astfel încît $df_x(\alpha(X_x, X_x)) < 0$.

Exemplu. Fie $N = R^2$ şi $M : x^2 + y^2 = 1$. Cîmpul vectorial unitar normal la M (cu sensul către interior) este $\xi = (-x, -y)$, iar cîmpul vectorial tangent la M este $V = (-y, x)$ şi nu se anulează pe M. Rezultă $\Omega(V, V) = (-\nabla_V \xi, V) = (V, V) > 0$.

Fie $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2 - 5x - 5y$ o funcţie convexă pe R^2. Se găseşte $df(\xi) = -2x^2 - 6xy - 10y^2 + 5x + 4y$ şi deci $df(\xi)_{(x,y)} < 0$ pentru orice (x, y) din interiorul elipsei de ecuaţie $-2x^2 - 6xy - 10y^2 + 5x + 4y = 0$. De exemplu pentru $p = (-1, 0)$ avem $df_p(\alpha_p(V_p, V_p)) = df(\xi)_p \Omega(V_p, V_p) < 0$.

§ 2. *Hipersuprafeţe de nivel constant*. Fie (N, g) o varietate riemanniană. Considerăm o funcţie $f : N \to R$ de clasă C^2. Mulţimea $M_c = \{x \in N \mid f(x) = c\}$ se numeşte mulţime de nivel constant c a funcţiei f. Dacă M_c nu posedă puncte critice ale lui f, atunci M_c este o hipersuprafaţă în N şi cîmpul normal unitar (în N) al lui M_c este grad f/||grad f||. De asemenea a doua formă fundamentală Ω_c a lui M_c este dată prin

$$\Omega_c(X, Y) = g\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}, \nabla_X Y\right),$$

unde X şi Y sînt cîmpuri vectoriale tangente la M_c, adică $X(f) = g(X \operatorname{grad} f) = 0 = Y(f) = g(Y, \operatorname{grad} f)$. Rezultă

$$\Omega_c(X, Y) = -\frac{\operatorname{Hess} f(X, Y)}{\|\operatorname{grad} f\|}.$$

Presupunem că (N, g) este completă. Dacă funcţia f este convexă, atunci Ω_c este negativ semidefinită.

5. *Teoremă*. Presupunem că $f : N \to R$ este o submersie de clasă C^2. Următoarele afirmaţii sînt echivalente.

1) Hipersuprafeţele de nivel constant ale funcţiei f se află printre hipersuprafeţele de nivel constant ale lui $\|\operatorname{grad} f\|$.

2) Există $h : Im\, f \to Im \|\operatorname{grad} f\|$ de clasă C^1 astfel încît $\|\operatorname{grad} f\| = h(f)$.

3) Liniile de gradient (traiectoriile ortogonale tuturor hipersuprafeţelor $M_c : f(x) = c$) sînt geodezice în N reparametrizate prin

$$s = c_1 + c_2 \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{r} (h(f)h'(f)) \circ \alpha(u)\, du\right) dr, \quad c_1, \ c_2 = \text{const}$$

4) $\Omega_c = k_c \operatorname{Hess} f|_{M_c}$, oricare ar fi hipersuprafaţa $M_c : f(x) = c$, unde k_c este o constantă strict negativă pe M_c.

Demonstraţie. Echivalenţa 1)⇔2) rezultă din faptul general că mulţimile de nivel constant ale funcţiei $u : N \to R$ sînt conţinute în mulţimi de nivel constant ale funcţiei $v : N \to R$ dacă şi numai dacă $\exists \varphi : Im\, u \to Im\, v$ astfel încît $v = \varphi \circ u$. Într-adevăr, pentru $a \in Im\, u$ $\exists\, b \in Im\, v$ astfel încît $M_a^u = u^{-1}(a) \subset v^{-1}(b) = M_a^v$ permiţînd definirea funcţiei φ prin legea $\varphi(a) = b$ (care este independentă de $x \in M_a^u$). Dacă mulţimile de nivel constant ale lui u sînt printre mulţimile de nivel constant ale lui v, atunci φ este injectivă.

Echivalenţa 2) $\Leftrightarrow$ 3) este reflectată de legătura dintre relaţia funcţională $\|\text{grad } f\| = h(f)$ şi relaţia diferenţială $\nabla_{\text{grad} f} \text{grad} f = h(f) h'(f) \text{ grad } f$.

6. *Teoremă.* Fie $f : N \to R$ o submersie de clasă C^2 cu proprietatea $\|\text{grad } f\| = h(f)$.

1) Restricţiile funcţiei f la liniile de gradient sînt convexe dacă şi numai dacă $h'(f)$ este pozitivă pe aceste linii.

2) Laplacianul lui f este o funcţie de f dacă şi numai dacă fiecare hipersuprafaţă de nivel constant a lui f are curbura medie constantă.

Demonstraţie. 1) Presupunem că $\alpha : I \to N$ este o linie de cîmp pentru grad f, adică $\alpha' = \text{grad} f \circ \alpha$. Rezultă $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \alpha = \mathrm{d}f(\alpha') = \|\text{grad } f\|^2 \circ \alpha = h^2(f) \circ \alpha$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f \circ \alpha = 2(h(f)h'(f)) \circ \alpha \, \mathrm{d}f(\alpha') = 2(h^3(f)h'(f)) \circ \alpha$.

§ 3. *Cazul fibratului tangent.* Fie (M, g) o varietate riemanniană finit dimensională conexă şi completă şi (TM, G) fibratul ei tangent, unde G este metrica Riemann-Sasaki indusă pe TM de metrica riemanniană g. Un punct din TM este reprezentat de o pereche ordonată (x, y), unde $x \in M$ şi $y \in T_x M$.

Se ştie că [7] :

(1) Dacă X_a, $a, b, \ldots = 1, \ldots, n$, este un cîmp de repere şi ω^b este cîmpul dual în $U \subset M$, atunci (X_a^H, X_a^V) este un cîmp de repere şi $(\omega^{bV}, \omega^{bH})$ este cîmpul dual în $\pi^{-1}(U) \subset TM$, unde indicele H marchează liftul orizontal, iar indicele V marchează liftul vertical.

(2) Dacă X_a este un cîmp de repere ortonormat în raport cu metrica g, atunci (X_a^H, X_a^V) este un cîmp de repere ortonormat în raport cu metrica Riemann-Sasaki G.

(3) Dacă γ_{bc}^a sînt componentele conexiunii ataşate metricii g în raport cu reperul ortonormat X_a, atunci

$$\overset{*}{\gamma}{}_{bc}^{a} = \gamma_{bc}^{a}, \quad \overset{*}{\gamma}{}_{\bar{b}c}^{a} = -\frac{1}{2} y^e \gamma_{ace}^{\ \ b}, \quad \overset{*}{\gamma}{}_{b\bar{c}}^{a} = -y^e \frac{1}{2} \gamma_{abe}^{\ \ c} \overset{*}{\gamma}{}_{\bar{b}\bar{c}}^{a} = 0,$$

$$\overset{*}{\gamma}{}_{bc}^{\bar{a}} = -\frac{1}{2} y^e \gamma_{bce}^{\ \ a}, \quad \overset{*}{\gamma}{}_{\bar{b}c}^{\bar{a}} = 0, \quad \overset{*}{\gamma}{}_{b\bar{c}}^{\bar{a}} = \gamma_{bc}^{a}, \quad \overset{*}{\gamma}{}_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} = 0, \quad \bar{a}, \bar{b}, \ldots, = \bar{1}, \ldots, \bar{n},$$

sînt componentele conexiunii ataşate metricii G în raport cu reperul ortonormat (X_H^a, X_a^V), unde $\gamma_{ace}^{\ \ b}$ sînt componentele cîmpului tensorial curbură pe M, iar y^e sînt componentele ataşate la y^i în raport cu reperul ortonormat X_a. Componentele γ_{bc}^a sînt antisimetrice în a şi c.

Funcţia

$$E : TM \to R, \quad E(x, y) = g(x)(y, y)$$

se numeşte *energia cinetică* ataşată structurii riemanniene.

Expresia acestei funcţii în raport cu reperul ortonormat (X_a^H, X_a^V) este

$$E = \sum_a (y^a)^2.$$

7. *Teoremă*. Energia E este o funcţie convexă pe (TM, G).

Demonstraţie. Preferăm calculul hessianei lui E în limbajul Vrânceanu [13],

$$(\text{Hess } E)_{BC} = \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{s}^B \partial \bar{s}^C} - \overset{*}{\gamma}{}^A_{BC} \frac{\partial E}{\partial \bar{s}^A},$$

unde $A, B, C = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$. Găsim

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{s}^c} = 2 \sum_a y^a \frac{\partial y^a}{\partial \bar{s}^c} = 2 \sum_a y^a (-\gamma^a_{cd} y^d) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{s}^{\bar{c}}} = 2 \sum_a y^a \frac{\partial y^a}{\partial \bar{s}^{\bar{c}}} = 2y^c,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \bar{s}^b \partial \bar{s}^c} = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{s}^{\bar{b}} \partial \bar{s}^c} = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{s}^b \partial \bar{s}^{\bar{c}}} = -2y^d \gamma^c_{bd}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{s}^{\bar{b}} \partial \bar{s}^{\bar{c}}} = 2\delta^c_b$$

şi deci

$$(\text{Hess } E)_{bc} = -\frac{1}{2} y^e \gamma^a_{bce} 2y^a = 0,$$

$$(\text{Hess } E)_{\bar{b}c} = 0,$$

$$(\text{Hess } E)_{b\bar{c}} = -2y^a (\gamma^c_{ba} + \gamma^a_{bc}) = 0,$$

$$(\text{Hess } E)_{\bar{b}\bar{c}} = 2\delta^c_b.$$

Astfel devine evident că Hess E este pozitiv semidefinită.

Identificînd submulţimea (secţiunea zero)

$$\{(x, 0) \mid x \in M, 0 \in T_x M\}$$

cu varietatea M se constată că G induce pe M metrica g. De aceea (M, g) este o subvarietate riemannianã a varietăţii riemanniene (TM, G).

8. *Consecinţe.* (1) Mulţimea $E(x, y) \leqslant 1$ este total convexă.

(2) Mulţimea punctelor critice ale lui E = mulţimea punctelor de minim global = secţiunea zero în TM = varietatea M. Deci (M, g) este total convexă (geodezică) în (TM, G), proprietate demonstrată pe o altă cale în [7].

(3) Dacă M este o varietate riemannianã compactă, atunci M este o retracţie tare de deformare a lui TM.

(4) Liniile de cîmp ale lui grad E sînt geodezice în (TM, G) reparametrizate prin $s = a + be^{2t}$, $t \in R$, $a, b = \text{const}$ (vezi §2).

9. *Teoremă*. Restricţia la (M, g) a unei funcţii convexe pe (TM, G) este o funcţie convexă.

Demonstraţie. Subvarietatea riemanniană (M, g) a varietăţii riemanniene (TM, G) este total geodezică şi se aplică consecinţa 3(2).

10. *Consecinţă.* Dacă (M, g) este o varietate riemanniană completă cu volum finit, atunci nu există funcţii convexe pe (TM, G) care să nu se reducă la constante pe M.

Evident pe subvarietăţile complete cu volum finit ale lui (TM, G) pe care energia nu se reduce la o constantă funcţionează consecinţa 4.

§ 4. *Probleme deschise.* 1) Pe R^n s-au studiat mai multe tipuri de convexitate şi legăturile dintre ele [2], [3], [6]. Ar fi interesant ca şi pe varietăţile riemanniene complete să se facă acest lucru (vezi şi [4], [5]). Spre exemplu f se numeşte *cvasi-convexă* pe mulţimea total convexă A dacă $\forall\, x, y \in A$, $x \neq y$, $\forall\, t \in [0, 1]$, $\forall\, \gamma_{xy}$=arc geodezic de la x la y, avem $f(\gamma_{xy}(t)) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$.

2) Presupunem că (M, g) este o varietate riemanniană completă, iar $f : M \to R$ este de clasă C^2. Deoarece $df \otimes df$ este pozitiv semidefinită rezultă că şi $(M, \tilde{g} = g + df \otimes df)$ este o varietate riemanniană completă. În plus

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} - (1 + \| \nabla f\|^2)^{-1} f^i f^j,$$

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1} f_{jk} f^i,$$

unde $f_r = \dfrac{\partial f}{\partial x^r}$, $f^i = g^{ir} f_r$, $\| \nabla f\|^2 = g^{ij} f_i f_j$, $f_{,k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^i_{jk} f_i$.

Rezultă

$$\tilde{f}_{jk} = \frac{1}{1 + \| \nabla f\|^2} f_{jk}.$$

Această relaţie între hessiene arată că dacă f este convexă în raport cu metrica g, atunci ea este convexă şi în raport cu metrica $\tilde{g} = g + df \otimes df$. Apare astfel naturală următoarea problemă: să se cerceteze schimbările de metrică riemanniană (de conexiune) care păstrează convexitatea unei funcţii date (implicit aceste transformări trebuie să păstreze completitudinea).

3) Pe R^n se cunoaşte noţiunea de funcţie conjugată a unei funcţii convexe [2], [6]. Se poate extinde această noţiune la cazul varietăţilor riemanniene?

4) Proprietatea „pe varietăţile riemanniene complete cu volum finit nu există funcţii convexe diferite de constante" a fost demonstrată în 1969 [1] pentru funcţiile de clasă C^2 şi în 1974 [14] pentru funcţiile de clasă C^0. Implicit avem şi o demonstraţie pentru funcţiile de clasă C^1, dar varianta specifică acestui caz nu a fost încă publicată.

BIBLIOGRAFIE

[1. *R. Bishop, B. O'Neill*, Trans. Amer. Math. Soc., 145 (1969), 1—49.
2. *M. Dragomirescu, M. Maliţa*, Programare neliniară, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
3. *J. Ponstein*, SIAM Review, 9 (1967), 115—119.

4. *F. Pop*, An. şt. Univ. A. I. Cuza, Iaşi, 25 (1979), 411—416.
5. *F. Pop*, Bul. Inst. Politehnic Iaşi, 26 (1980), 39—43.
6. *R. Rockafellar*, Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.
7. *C. Udrişte*, Rev. Roum., Math. Pures Appl. 15, 7 (1970), 1079—1096.
8. *C. Udrişte*, St. Cerc. Mat. 28, 6 (1976), 735—745.
9. *C. Udrişte*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, 21(69), 1—2 (1977), 215—218.
10. *C. Udrişte*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 24, 9 (1979), 1385—1388.
11. *C. Udrişte*, An. şt. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, 26, 2 (1980), 303—305.
12. *C. Udrişte*, Convex hypersurfaces, National Colloquium of Geometry and Topology, Vas lui-Valea Hogei-Bacău, Romania, June 27—30, 1980.
13. *Gh. Vrânceanu*, Lecţii de geometrie diferenţială, E. D. P., Bucureşti, 1962.
14. *S. T. Yau*, Math. Ann. 207 (1974), 269—270.

Convex Functions on Riemannian Manifolds and Submanifolds

§ 1 presents: (1) the relation between the gradient of a function on a Riemannian N and the gradient of its restriction to a Riemannian submanifold $M \subset N$, (2) the relation between the Hessian of a function on a Riemannian manifold N and the Hessian of its restriction to a Riemannian submanifold $M \subset N$, (3)corollaries imposed by these relations. § 2 proves some properties of level hypersurfaces in a Riemannian manifold. § 3 shows that the tangent bundle of a Riemannian manifold admits a convex function, namely, the energy function associated with the Riemannian structure, and describes some consequnces of this fact. § 4 formulates four open problems:

(1) The study of various types of convexity (and of the relations between them) on a Riemannian manifold suggested by the Euclidean models.

(2) The investigation of changes of the Riemannian metric (or of the Riemannian connection) which conserve the convexity of a given function.

(3) Is there a Riemannian analogue for the notion of conjugate function associated with a convex function on R^n?

(4) A suitable proof for the fact that a C^1 convex function on a complete Riemannian manifold with finite volume is a constant.

C. Z.: 517. 547

ASUPRA FUNCȚIILOR ALGEBRICE ALEATOARE

TATIANA STĂNĂȘILĂ*

În lucrare se dă o demonstrație a faptului că orice polinom algebric aleator avînd grad mărginit admite soluții variabile aleatoare și se obțin unele consecințe ale acestui rezultat.

Fixăm un cîmp complet de probabilitate (Ω, K, P). Condiția de completitudine se va folosi astfel: dacă $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sînt funcții astfel încît $f = g$ *a. p.* și f este variabilă aleatoare, atunci g este variabilă aleatoare, [2].

Prin *funcție algebrică aleatoare* vom înțelege orice funcție $z : \Omega \to \mathbb{C}$, $\omega \mapsto z(\omega)$ pentru care există o funcție nenulă $f : \mathbb{C} \to L(\Omega)$, $z \mapsto f(z, \omega)$ astfel încît $f(z(\omega), \omega) = 0$ a. p. (Prin $L^1(\Omega)$ se notează ca de obicei spațiul variabilelor aleatoare integrabile $\Omega \to \mathbb{C}$). În general funcțiile algebrice aleatoare nu sînt măsurabile, adică ecuațiile de forma $f(z, \omega) = 0$ pot să nu aibă ca soluții variabile aleatoare. În această lucrare ne propunem să arătăm că în cazul cînd f este un polinom cu grad mărginit acest fapt are totuși loc și vom obține cîteva consecințe.

Să considerăm un polinom aleator de grad n cu coeficienți variabile aleatoare cu valori complexe $S = z^n + a_1(\omega) z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\omega) z + a_n(\omega)$ $(a_0 = 1)$. Este evident că pentru orice întreg $q \geqslant 1$ și $(\forall)$ $\omega \in \Omega$ există numere complexe $\{c_{pq}(\omega)\}_{0 \leqslant p \leqslant n, q \geqslant 1}$ astfel încît să aibă loc identitatea în z

$$\sum_{p=0}^{n} [a_{n-p}(\omega)(z + e^{i\frac{\pi}{q}})^p - c_{pq}(\omega) z^p] = 0. \tag{1}$$

În particular, $c_{nq}(\omega) = 1$ pentru orice $q \geqslant 1$, $\omega \in \Omega$.

Fie K cubul unitate din $\mathbb{R}^n$, $K = \underbrace{[0, 1] \times \ldots \times [0, 1]}_{n \text{ ori}}$ și $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x \in K$. Pentru orice numere întregi $q \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ punem

$$\varphi_{qk}(\omega) = \begin{cases} x_k & 1 \leqslant k \leqslant n \\ -\sum_{p=0}^{n} c_{pq}(\omega)\, \varphi_q(k + p - n), & k \geqslant n+1, \end{cases} \quad \psi_{qk}(\omega) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varphi_{q,k+1}(\omega)}{\varphi_{qk}(\omega)}, & \varphi_{qk}(\omega) \neq 0 \\ 0 \quad . & \varphi_{qk}(\omega) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

* Lector dr., catedra Matematică

obţinînd astfel două şiruri duble de variabile aleatoare cu valori complexe asociate punctului x din K.

Lemă. Pentru orice întreg $q \geqslant 1$ şi $\omega \in \Omega$ există $\psi_k(\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_{qk}(\omega)$, iar limita

$$\lim_{q\to\infty} \int_K (\psi_q(\omega) + e^{i\frac{\pi}{q}}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

există şi este egală cu una din rădăcinile polinomului S.

Demonstraţie. Indicăm mai întîi o posibilitate de ordonare a mulţimilor finite de numere complexe:

$$(*)\begin{cases} \text{Dacă } m \geqslant 1 \text{ este un întreg fixat, atunci există o funcţie} \\ I : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}_+ \text{ astfel încît pentru orice } m \text{ numere complexe dis-} \\ \text{tincte } z_1, z_2, \ldots z_m \in \mathbb{C} \text{ şi pentru orice } q \geqslant I(z_1, z_2, \ldots, z_m), \\ \text{să avem } |z_1 - \alpha| > |z_2 - \alpha| > \ldots > |z_m - \alpha| > 0, \text{ unde } \alpha = e^{i\frac{\pi}{q}}. \end{cases}$$

Acest fapt se demonstrează observînd că pentru orice puncte distincte $z_1, z_2 \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ există un număr $I \in \mathbb{R}_+$ depinzînd de $z_1, z_2, \ldots, z_m$ astfel încît ori de cîte ori $0 \leqslant J \leqslant I$, rezultă $|z_1 - e^{iJ}| > |z_2 - e^{iJ}| > \ldots \ldots > |z_m - e^{iJ}| > 0$].

Trecem la demonstrarea primei afirmaţii din lemă. Conform (*) se poate ordona colecţia $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ a rădăcinilor distincte ale polinomului S. Fixăm $x \in K$. Din relaţiile (2), folosind fapte elementare de ecuaţii liniare cu diferenţe finite, rezultă că există funcţii polinomiale (aleatoare) T_j, $1 \leqslant j \leqslant m$ depinzînd de x astfel încît pentru orice întreg $k \geqslant 1$,

$$\varphi_{qk}(\omega) = \prod_{j=1}^{m} T_j(k)\,(z_j(\omega) - \alpha)^k \tag{3}$$

(Am notat $\alpha = e^{i\frac{\pi}{q}}$ şi am utilizat faptul că rădăcinile polinomului $\sum\limits_{p=0}^{n} c_{pq}(\omega) z^q$ sînt $z_j(\omega) - \alpha$, $1 \leqslant j \leqslant m$, aşa cum rezultă din relaţia (1). Remarăcm de asemenea că gr $T_j \leqslant n$ şi că polinoamele T_j sînt nule dacă şi numai dacă $x = 0$. Dacă $x \neq 0$, fie $r = \min\{j \mid T_j \neq 0\}$. Atunci pentru orice $q \geqslant I(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ avem

$$|z_r - \alpha| > z_{r+1} - \alpha| > \ldots > |z_m - \alpha| > 0$$

$$\text{şi } \lim_{k\to\infty} \psi_{qk}(\omega) \overset{\text{cf}(2)}{=\!=} \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi_{q,k+1}(\omega)}{\varphi_{qk}(\omega)} \overset{\text{cf}(3)}{=\!=} z_r(\omega) - \alpha$$

$$\text{deci } \psi_q(\omega) = \lim_{k\to\infty} \psi_{qk}(\omega) = \begin{cases} z_r(\omega) - \alpha & \text{dacă } x \neq 0 \\ & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

BUDAPEST KÖNYVTÁRA

A doua parte a lemei rezultă observînd că pentru orice $q \geqslant 1$ avem

$$\int_K (\psi_q(\omega) + e^{i\frac{\pi}{q}})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_K \psi_q\ (\omega)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n +$$

$$+ \alpha \int_K dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \alpha + \int_K \psi_q(\omega) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

deci dacă $q \geqslant I(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, atunci $\psi_q(\omega) = z_m(\omega) - \alpha$ şi ca atare,

$$\lim_{q\to\infty} \int_K (\psi_q(\omega) + e^{i\frac{\pi}{q}})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = (z_r(\omega) - \alpha) + = z_r\ (\omega).$$

Cu ajutorul lemei anterioare vom da o demonstraţie simplă a unui rezultat datorat în esenţă lui Hammersley [4] şi care ar putea fi numit teorema fundamentală a algebrei pentru polinoame aleatoare. O altă demonstraţie se poate obţine prin adaptarea demonstraţiei teoremei fundamentale a algebrei ca teoremă de punct fix, folosind structura de F-spaţiu a lui $L^1(\Omega)$.

Teorema 1. Fie $S(z, \omega) = z^n + a_1(\omega)z^{n-1} + \ldots + a_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $z \in \mathbb{C}$ un polinom cu coeficienţi variabile aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$. Atunci există cel puţin o variabilă aleatoare $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ astfel încît $S(\varphi(\omega), \omega) = 0$ a. p.

Demonstraţie. Ideea este de a urmări o schemă similară celei din teorema de continuitate a rădăcinilor unui polinom ca funcţie de coeficienţi, aici problema fiind *măsurabilitatea*. Mai întîi să observăm că toţi coeficienţii $\{c_{pq}\}$ $0 \leqslant p \leqslant n$, $q \geqslant 1$ daţi de (1) sînt variabile aleatoare (depinzînd de $a_1, a_2, \ldots, a_n$). Se pot apoi considera şirurile aleatoare definite prin (2) iar lema anterioară arată că

$$\varphi(\omega) = \lim_{q\to\infty} \int_K (\psi_k(\omega) + e^{i\frac{\pi}{q}})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

are proprietatea că $S(\varphi(\omega), \omega) = 0$. Dar integrala ca şi limita punctuală a unui şir de variabile aleatoare sînt de asemenea variabile aleatoare, deci $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ este o soluţie aleatoare a ecuaţiei $S(z, \omega) = 0$.

Corolar 1. Fie un polinom algebric aleator $S(z, \omega) = a_0(\omega) z^n + a_1(\omega)z^{n-1} + \ldots + a_n(\omega)$. Există atunci o ordonare a soluţiilor polinomului astfel încît acestea să fie funcţii măsurabile $\Omega \to \mathbb{C}$ de coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Demonstraţie. Pentru obţinerea unei prime soluţii se observă că se poate presupune $a_0 = 1$ a. p. [Într-adevăr, dacă $a_0 \neq 0$ a. p. putem împărţi cu a_0 fără a modifica rădăcinile lui S şi aplicînd teorema deducem o primă soluţie aleatoare $z_1(\omega)$ pentru S; iar dacă $a_0 = 0$ a. p. punem $z_1 = \infty$].

Procedăm apoi prin inducție, adaptînd convenabil schema Horner. Anume, considerăm polinomul aleator

$$T(z, \omega) = b_0(\omega)z^{n-1} + b_1(\omega)z^{n-2} + \ldots + b_{n-1}(\omega)$$

cu coeficienți $\Omega \to \mathbb{C}$ definiți astfel: dacă $a_0 \neq a_0$, a. p. luăm $b_0 = a_0$, $b_j(\omega) = a_j(\omega) + z_1(\omega)b_{j-1}(\omega)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant n$, socotind $b_n = 0$; iar dacă $a_0 = 0$ a. p. se ia direct $b_k = a_{k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Fie $z_2(\omega), \ldots, z_n(\omega)$ rădăcinile (ordonate) ale lui T, care conform ipotezei de inducție sînt funcții măsurabile de $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$. Atunci rădăcinile lui S vor fi $z_1(\omega), z_2(\omega), \ldots, z_p(\omega)$ și vor fi funcții măsurabile de $a_0, a_1 \ldots, a_n$, deoarece b_i depind măsurabil de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Corolar 2. Orice matrice pătratică cu coeficienți aleatori admite o ordonare a valorilor proprii (complexe) astfel încît acestea să depindă măsurabil de coeficienții matricii.

Dacă X este o mulțime oarecare, notăm cu $\mathrm{Al}(X)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f(x, \omega)$, $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că oricare ar fi $x \in X$, $f(x,.)$ este variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$.

Fixăm $f \in \mathrm{Al}(X)$. Pentru orice $\omega \in \Omega$, $Y \subset X$ fixate, vom nota cu $\nu(Y, \omega)$ = cardinalul mulțimii $\{x \in Y \mid f(x, \omega) = 0\}$.

Teorema care urmează este cunoscută în cazul particular al polinoamelor algebrice aleatoare și apare ca o generalizare sensibilă a acestui caz.

Teorema 2.

a) Fie $f \in \mathrm{Al}(\mathbb{R})$. Dacă ecuația $f(x, \omega) = 0$ are soluții măsurabile $\Omega \to \mathbb{R}$ în număr cel mult numărabil, atunci pentru orice mulțime boreliană $B \subset \mathbb{R}$, $\nu(B,.)$ este variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{N} \cup \infty$.

a') Fie $f \in \mathrm{Al}(\mathbb{C})$. Dacă ecuația $f(x, \omega) = 0$ are soluții măsurabile $\Omega \to \mathbb{C}$ în număr cel mult numărabil, atunci pentru orice mulțime boreliană $B \subset \mathbb{C}$, $\nu(B \cdot)$ este o variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{N} \cup \infty$.

b) Fie ecuația $F(x, \omega) = \sum_{k=1}^{p} a_k(\omega) \cdot f_k(x) = 0$ cu $a_k : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile aleatoare astfel încît pentru orice $\omega \in \Omega$ funcția $F(x, \omega)$ să fie de clasă C^1 pe un interval $J = a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, avînd un număr finit de puncte critice pe orice subinterval compact. În aceste condiții, dacă funcția $\nu(J,.)$ are valori finite a. p., atunci ea este o variabilă aleatoare.

Demonstrație. a) Fie $\{x_n(\omega)\}_{n \geqslant 1}$ soluțiile respective. Pentru orice întreg $k \geqslant 0$, mulțimea $\{\omega \in \Omega \mid \nu(B, \omega) = k\}$ coincide cu una din mulțimile $\bigcap_{i \in I \subset \mathbb{N}} x_i^{-1}(B)$. Aceste mulțimi aparțin lui K deoarece x_i sînt măsurabile, deci mulțimile $\{\omega \in \Omega \mid \nu(B, \omega) = k\}$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$ sînt evenimente din K. Atunci $\nu(B \cdot)$ este o variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{N} \cup \infty$, considerînd pe mulțimea $\mathbb{N} \cup \infty$ măsura — cardinal [Reamintim că pentru orice mulțime Z, tripletul $(Z, \mathrm{P}(Z), \mathrm{card})$ este un spațiu cu măsură-cardinal, punînd $\mathrm{card}\, A = |A|$ dacă submulțimea $A \subset Z$ este finită și $\mathrm{card}\, A = \infty$ dacă $A \subset Z$ este infinită.

a') Demonstraţia este similară.

b) Cîmpul de probabilitate (Ω, K, P) fiind presupus complet, este suficient să arătăm că $\nu(J, \cdot)$ coincide a. p. cu o funcţie K —măsurabilă. Pentru orice $\varepsilon > 0$ funcţia $\Phi = (\delta_\varepsilon \cdot F) \cdot |F'_x|$ este o variabilă aleatoare în ω, pozitivă pentru orice $x \in J$ fixat. [Aici $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}$ pentru $|t| < \varepsilon$ şi $\delta_\varepsilon(t) = 0$ pentru $|t| \geqslant \varepsilon$]. Conform unor rezultate clasice, Φ rezultă măsurabilă relativ la produsul măsurii Lebesgue pe intervalul J cu măsura P deci funcţia

$$\omega \mapsto \int_a^b \delta_\varepsilon(F(x, \omega)) \cdot |F'_x(x, \omega)| dx$$

este o funcţie K — măsurabilă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Conform unei teoreme binecunoscute a lui Kac [3], rezultă

$$\nu(J, \omega) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \delta_{\frac{1}{n}}(F(x, \omega)) \cdot |F'_x(x, \omega)| dx$$

deci $\nu(J, \cdot)$ este o funcţie K — măsurabilă, ca limită a. p. de funcţii măsurabile.

Din teoremele 1 şi 2 rezultă direct următorul

Corolar. Dacă $S(z, \omega)$, $z \in \mathbb{C}$ este un polinom algebric aleator, atunci numărul soluţiilor lui S situate într-o mulţime boreliană prescrisă din planul complex, este o variabilă aleatoare. Un rezultat similar are loc în cazul real.

Trebuie remarcat că ipotezele din teorema 2 a), a') sînt îndeplinite în cazul polinoamelor algebrice, conform teoremei 1. În schimb pentru ecuaţiile considerate în teorema 2, b) existenţa unor soluţii măsurabile nu este asigurată în general şi totuşi, am putut stabili măsurabilitatea numărului de soluţii ale lor. În această ordine de idei, se poate pune problema evaluării mediei şi dispersiei variabilei aleatoare $\nu(B, \cdot)$, [1], [3], [5].

BIBLIOGRAFIE

1. *A. T. Bharucha-Reid* Random algebric equations, Probabilistic methods in applied math., vol. 2, 1—52, Academic Press, 1970.
2. *M. Iosifescu, Gh. Mihoc ş. a.* Teoria probabilităţilor şi statistică matematică, Ed. Tehnică, 1966.
3. Bull. Amer. Math. Soc., 49, 314—320, 1943.
4. *J. Hammersley*, The zeros of a random polynomial, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statistt. Prov., 2, 89—111, 1956.
5. *T. Stănăşilă*, *Buletinul IPB*, tom 38, Nr. 2,11—14, 1976.

On the Random Algebraic Functions

In this paper one gives a proof of the following fact : any random algebraic polynomial having a bounded degree admits measurable solutions (i.e. random variables) and some consequences are drawn.

C. Z.: 535. 145

STUDIUL TEORETIC AL LIMITEI BISTABILITATE-AUTOFOCALIZARE ÎN MATERIALE CU PROPRIETĂȚI OPTICE NELINIARE

I. M. POPESCU, MIHAELA A. DUMITRU, P. E. STERIAN*

În lucrare se analizează condițiile de obținere a fenomenului de bistabilitate optică într-un sistem complet optic, conținînd un mediu neliniar de tip Kerr, în care sînt îndeplinite condițiile de producere a efectului neliniar de autofocalizare.

Se constată că efectul de autofocalizare poate fi menținut și la puteri optice incidente inferioare puterii critice de autofocalizare, printr-un mecanism de reacție, caracteristic funcționării bistabile a sistemului.

1. Introducere

Odată cu utilizarea pe scară largă a laserului în cercetare, s-au dezvoltat în mod deosebit studiile asupra fenomenelor opticii neliniare. Adesea, două sau mai multe efecte neliniare se produc împreună, unul fiind dominant pentru anumite valori ale proprietăților cîmpului optic sau ale mediului neliniar. De aceea este interesant de precizat care sînt limitele de acțiune ale unuia sau altuia dintre aceste fenomene.

Ne propunem să analizăm din acest punct de vedere fenomenele neliniare de bistabilitate și autofocalizare, ținînd seama de importanța dobîndită în ultimii ani de studiul teoretic și experimental al efectului de bistabilitate optică, care constă în funcționarea pe două nivele optice stabile a unui sistem avînd ca parte principală un mediu al cărui indice de refracție se modifică funcție de intensitatea cîmpului optic incident [1].

2. Aspectul calitativ al fenomenului de autofocalizare

Autofocalizarea luminii care pătrunde într-un mediu cu proprietăți neliniare este un efect neliniar de ordinul trei, evidențiat experimental în anul 1964. S-a observat că fasciculul incident se propagă în mediu sub forma unuia sau mai multor filamente mici, fiecare în lungime de cîțiva cm și avînd un diametru de cîțiva μm, ce se păstrează aproximativ constant. Intensitatea filamentelor este mare (de ordinul $10 W/cm^2$) și au adesea o lărgime spectrală de aproximativ 100 cm^{-1}.

Mecanismul fizic de producere a acestuiefect este creșterea indicelui de refracție odată cu intensitatea fasciculului incident, conform relației:

$$n = n_0 + \Delta n\,(|E|^2) \qquad (1)$$

* Prof. dr. ing.; Asist.; Conf. dr. ing., catedra Fizică

unde n_0 este indicele de refracţie iniţial, Δn este indicele indus de cîmpul optic, iar $|E|^2$ desemnează intensitatea acestui cîmp. [2].

Modificarea indicelui de refracţie se datorează reorientării şi redistribuirii moleculelor în lichide, electrostricţiunii în solide, modificării păturilor electronice în gaze etc.

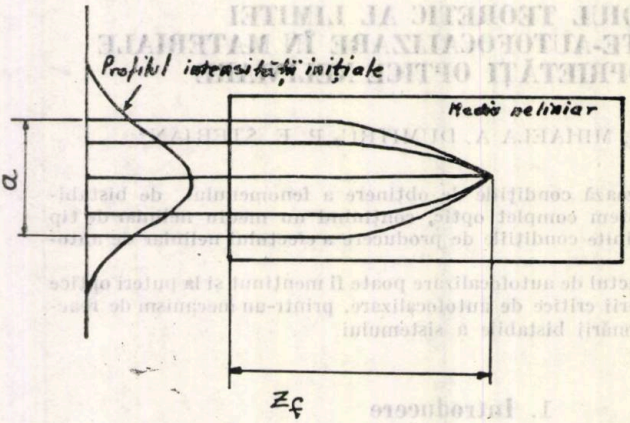


Fig. 1. Propagarea unui fascicul laser printr-un mediu neliniar.

Fie un fascicul laser cu profil transversal gaussian, care se propagă în mediul neliniar. Partea centrală a fasciculului „vede" un indice de refracţie mai mare decît partea marginală deci se propagă cu o viteză mai mică. În consecinţă, la traversarea mediului frontul de undă plană iniţial devine din ce în ce mai distorsionat (Fig. 1). Deoarece direcţia de propagare este perpendiculară pe front, fasciculul se autofocalizează. Avînd o secţiune transversală finită, fasciculul este supus şi difracţiei, astfel încît autofocalizarea apare doar cînd efectul de autofocalizare întrece efectul de difracţie. Cînd cele două efecte se echilibrează, fasciculul incident se propagă neschimbat ca profil transversal.

Pentru a induce un Δn suficient de mare pentru autofocalizare este necesar un fasicul laser foarte intens, de aceea sînt adesea folosiţi laseri în regim pulsat.

În acest caz se pot înregistra două situaţii :

— lărgimea pulsului depăşeşte timpul de răspuns al indicelui de refracţie (autofocalizare aproape staţionară) ;

— lărgimea pulsului este mai mică sau comparabilă cu timpul de răspuns al indicelui de refracţie, caz în care partea din spate a pulsului va vedea un Δn indus de partea din faţă (autofocalizare în regim dinamic).

Ambele cazuri se pot descrie formal cu ecuaţia neliniară de undă :

$$\Delta E + \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right) [(n_0 + \Delta n)^2 E] = 0 \qquad (2)$$

În cazul lichidelor Kerr, în care moleculele puternic anizotrope se orientează sub influenţa cîmpului optic aplicat, Δn indus se supune unei

ecuații de relaxare Debye. Dacă răspunsul Δn al mediului este aproape instantaneu, iar cîmpul nu este prea puternic, se poate scrie :

$$\Delta n = n_2 |E|^2 \tag{3}$$

neglijîndu-se dependența de $|E|^2$ de ordin superior.

În condițiile de stare staționară și ținînd seama de relația (3), spotul focal va apărea la distanța :

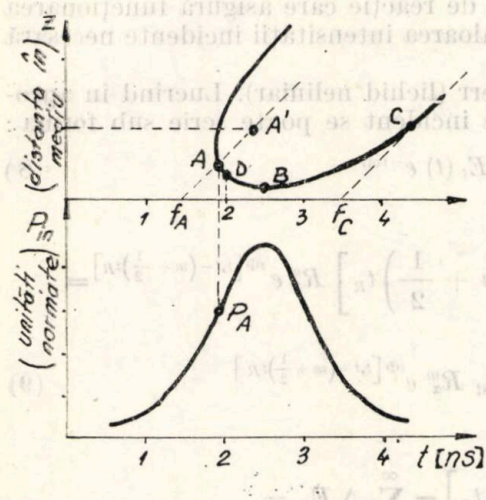


Fig. 2. Studiul traiectoriei fasciculului autofocalizat în mișcare.

$$z_f = \frac{K}{\sqrt{P(\xi)} - \sqrt{(P_0)}} \tag{4}$$

unde

$$\xi = t - z_f \frac{u_0}{c} \tag{5}$$

S-a notat cu $P(\xi)$ puterea critică de autofocalizare :

$$P = \frac{\lambda^2 c\, n_0}{32\, \pi^2 n_2} \tag{6}$$

și cu P_{in} puterea incidentă :

$$P_{in} = \frac{1}{8} c n_0 E_0^2 a^2 \tag{7}$$

K fiind o constantă.

Relația (4) arată că, dacă P este funcție de timp, spotul focal se mișcă de-a lungul direcției de propagare a cîmpului. „Filamentele" observate în acest caz sînt traiectorii ale fasciculului autofocalizat aflat în mișcare. (Fig. 2). Din figura 2 se observă că din punctul D spotul focal se desparte în două, unul mișcîndu-se numai înainte, iar celălalt întîi înainte și apoi înapoi.

Prezența unor aberații neliniare dă naștere la multiple focare de-a lungul direcției de propagare. In lichidele Kerr focarul mobil conduce la apariția unor anomalii în producerea altor efecte neliniare, de exemplu efectele Raman și Brillouin.

Modularea de fază, obținută prin autofocalizare, determină lărgimea spectrală a luminii unui filament.

3. Limita bistabilitate-autofocalizare

Fie un fascicul laser gaussian, avînd puterea P_{in}, focalizat pe partea de intrare a unui mediu neliniar. Măsura tăriei acestei neliniarități este P_{cr}. Pentru $P_{in} < P_{cr}$, fasciculul diverge mai puternic decît în absența neliniarității; dacă $P_{in} = P_{cr}$ fasciculul trece prin mediu fără schimbări în dimensiunea spotului; dacă $P_{in} > P_{cr}$ fasciculul converge.

Aliniind la ieşirea din mediul neliniar o lentilă de focalizare şi o oglindă semitransparentă prevăzută cu un mic orificiu prin care pătrunde lumina, se poate realiza reîntoarcerea fasciculului de ieşire din nou în mediul neliniar, realizîndu-se astfel o buclă de reacţie. Mărimea orificiului se poate regla astfel încît să întărească efectul de autofocalizare chiar şi la scăderea puterii incidente sub valoarea P_{cr} [3]. În acest caz sistemul poate funcţiona sub formă de ciclu histerezis, avînd două stări stabile (Fig. 3).

Din figură se observă că bucla de reacţie care asigură funcţionarea bistabilă a sistemului poate coborî valoarea intensităţii incidente necesară producerii autofocalizării.

Analizăm cazul unui mediu Kerr (lichid neliniar). Lucrînd în aproximaţia undelor plane, cîmpul optic incident se poate scrie sub forma:

$$E_{in}(t) = E_i(t)\, e^{-i\omega t} \tag{8}$$

iar cîmpul transmis:

$$E_{ieş}(t) = T\, e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} E_i\left[t - \left(m + \frac{1}{2}\right) t_R\right] R_\alpha^m\, e^{i\Phi\left[t, t-\left(m+\frac{1}{2}\right)t_R\right]} =$$

$$T\, e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{t} \Delta E_{il}\, R_\alpha^m\, e^{i\Phi\left[t, t-\left(m+\frac{1}{2}\right)t_R\right]} \tag{9}$$

unde s-a notat:

$$E_i\left[t - \left(m + \frac{1}{2}\right) t_R\right] = \sum_{l=m}^{\infty} \Delta E_{il} =$$

$$= \sum_{l=m}^{\infty} E_i\left[t - \left(l + \frac{1}{2}\right) t_R\right] - E_i\left[t - \left(l - \frac{1}{2}\right) t_R\right] \tag{10}$$

m, l fiind numere întregi pozitive, t_R timpul de parcurgere dus-întors a mediului neliniar de lungime d; R, T-coeficienţii de reflexie, respectiv transmisie, ai oglinzii.

S-a ţinut seama de atenuarea radiaţiei în mediu:

$$R_\alpha = R\, e^{-\alpha d} \tag{11}$$

S-a notat de asemenea cu $\Phi\left[t, t - \left(m + \frac{1}{2}\right) t_R\right]$ creşterea fazei cîmpului incident la momentul $t - \left(m + \frac{1}{2}\right) t_R$, cîmp transmis la momentul t.

Dacă în acest timp variaţia cîmpului este mică, se poate face aproximaţia:

$$E_{ieş}(t) = T\, e^{-i\omega t} \int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} E(t')\right) \cdot \sum_{m=0}^{m_{max}} R_\alpha^m\, e^{i\Phi\left[t, t-\left(m+\frac{1}{2}\right)t_R\right]}\, \mathrm{d}t' \tag{12}$$

unde

$$m_{max} \leqslant \frac{t - t'}{t_R} \tag{13}$$

Variația fazei este în acest caz :

$$\Phi\left[t, t - \left(m + \frac{1}{2}\right) t_R\right] = \sum_{l=0}^{m} k \left(\int_0^d \left\{ n_0 + \Delta n \left[t - \left(l + \frac{1}{2} \right) t_R + \left(\frac{C}{n_0} \right) z, z \right] \right\} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \, \mathrm{d}z + \sum_{l=0}^{m} k \left(\int_d^0 \left\{ n_0 + \Delta n \left[t - l t_R + \left(\frac{C}{n_0} \right) (d - z), z \right] \right\} \right) \right\} \mathrm{d}z$$

Considerînd variația lui Δn în timpul t_R neglijabilă, relația (11) se poate scrie :

$$\Phi \left[t, \, t - \left(m + \frac{1}{2} \right) t_R \right] \cong \left(m + \frac{1}{2} \right) \Phi_0 + \frac{1}{2} \Delta \Phi (t) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{m} \Delta \Phi (t - l t_R) \tag{15}$$

unde s-a notat :

$$\Phi_0 = 2kn_0 d \tag{16}$$

k fiind vectorul de undă [4].

Folosind ecuația dinamică de relaxare Debye pentru Δn, deci și pentru $\Delta\Phi$, sub forma :

$$\tau_\Delta \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi = k \, \mathrm{d} \, (\Delta \, n_i) + \Delta n_r) \tag{17}$$

unde τ_Δ este timpul de relaxare Debye iar Δn_i și Δn_r indicii de refracție induși în mediu de fasciculul inițial, respectiv de cel reflectat de oglindă, se poate scrie :

$$\tau_\Delta \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi = 3k \, dn_2 \, (|E_i|) + |E_r|-) \tag{18}$$

care se poate pune sub forma integrală :

$$\Delta \Phi (t) = 3kd \frac{n_2}{n_0} \frac{1}{T \tau_\Delta} \int_{-\infty}^{t} |E_{ies}| \, (t') \, e^{-(t-t')/\tau_b} \, \mathrm{d}t' \tag{19}$$

unde :

$$|E_{ies}|^2 = n_0 T |E_i|^2 - = n_0 T |E_r|^2 \frac{1}{R} \tag{20}$$

Sistemul de ecuații (18), (19), (20) descrie complet comportarea sistemului în regim dinamic.

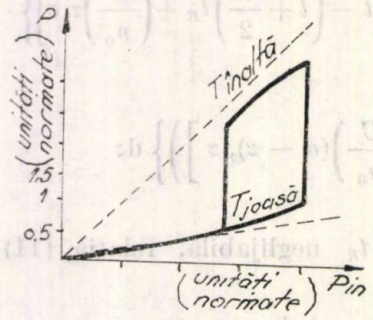


Fig. 3. Ciclul histerezis de funcționare al unui sistem bistabil bazat pe fenomenul de autofocalizare. Se observă posibilitatea reducerii puterii incidente necesare autofocalizării.

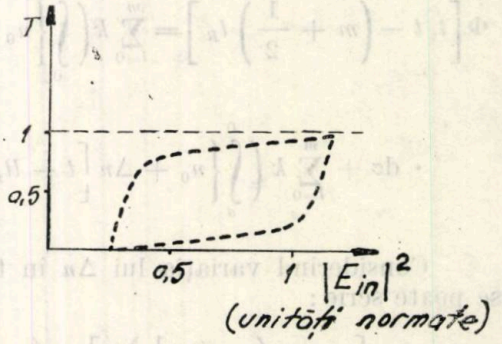


Fig. 4. Ciclul histerezis de funcționare a sistemului bistabil analizat, atunci cînd mediul neliniar folosit este un lichid Kerr.

În cazul analizat în lucrare — cel al stării staționare, ecuațiile (11), (19) se pot scrie :

$$E_{ies} = T E_{in} \exp [i(\Phi + \Delta\Phi)/2] / [1 - R \exp (i\Phi_0 + i\Delta\Phi)]$$

$$\Delta\Phi = 3kd \frac{n}{n_0} \frac{1+R}{T} |E_{ies}|^2 \tag{21}$$

Fixînd de exemplu $\Delta\Phi = -0{,}2\pi$, din (19) și (21) se poate determina E_{ies} funcție de E_{in} obținînd un ciclu histerezis de forma din fig. 4. Se observă că acesta are forma prevăzută în fig. 3.

4. Concluzii

Pe baza ecuației care descrie comportarea dinamică a unui mediu neliniar traversat de un fascicul laser pentru care s-a folosit un model de unde plane, s-a elaborat un studiu al influenței reciproce a fenomenului de autofocalizare și bistabilitate.

Importanța studiului rezidă în faptul că, fasciculul laser fiind foarte intens, el produce în medii efecte de autofocalizare, care pot perturba alte efecte neliniare de interes în experimentul respectiv, sau poate fi el însuși perturbat de alte efecte, atunci cînd autofocalizarea este fenomenul principal urmărit.

Pe de altă parte, obținerea pe baze noi a unei comportări bistabile într-un sistem complet optic, folosind autofocalizarea luminii, prezintă mare interes teoretic și practic.

Studiile existente pînă în prezent în literatură se referă numai la medii neliniare în stare gazoasă.

BIBLIOGRAFIE

1. *Ch. M. Bowden, M. Ciftan, H. R. Robl*, Optical Bistability, Plenum Press, New York-London, 1980;
2. *I. M. Popescu, ș. a.*, Aplicații ale laserilor, Ed. tehn. 1978;
3. *J. E. Bjorkholm, ș. a.*, Optics Letters, Vol. 6, No. 7, 1981, p. 345;
4. *Bisehoffberger, ș. a.*, Physical Rewiew A, Vol. 19, No. 3, p. 1169, 1979.

The Theoretical Study of the Bistability-Self-Focusing Limit in Materials with Nonlinear Optical Properties

In this paper are analysed the conditions for obtaining the intrinsic optical bistability (with optical feedback), in a nonlinear Kerr medium with self-focusing effect.

The result is that the self-focusing can be maintained at an optical incident power smaller that the critical power for self-focusing, by a feedback loop, characteristic for the bistable operation.

C. Z.: 681: 621. 82

LE CALCUL ET LA PROJECTION DES PALIERS AUX GAZ POUR LES APPAREILS

T. DEMIAN, A. PASCU*

Les paliers aux gaz représentent actuellment une solution constructive typique pour l'appui des parties mobiles des appareils comme les gyroscopes, les tables rotatives, les appareils pour mesurage des dimensions, auxquels ils assurent une précision élevée de fonctionnement.

Par la suite on présentera brièvement quelques aspects particuliers concernant l'application des paliers aux gaz pour une série de constructions qui ont fait l'objet des préoccupations de la chaire de mécanique de precision de I. P Bucarest.

1. Introduction

Les paliers aux gaz représentent actuellement une solution constructive typique pour l'appui des parties mobiles des appareils. Les paliers gazodynamiques sont compétitifs dans le domaine des gyroscopes et de l'appareillage médical où ils font possible la réalisation des constructions simples et fiables. Les paliers gazostatiques sont appliqués de plus en plus comme des éléments d'appui pour les systèmes mobiles des tables rotatives, des machines et des appareils pour mesurage des dimensions et des autres appareils auxquels on assure une précision élevée de fonctionnement.

Pour chaque type de palier, pour chaque solution constructive surgissent dans le calcul de projection des problèmes qui ne peuvent être solutionés que par un calcul laborieux en employant le calculateur comme aide principale.

Par la suite on présentera brièvement quelques aspects particuliers concernant l'application des paliers aux gaz pour une série de constructions qui ont fait l'objet des préoccupations de la chaire de mécanique de précision de I.P.B.

2. Les paliers gazodynamiques

Pour les paliers gazodynamiques des appareils qui fonctionnent à une vitesse élevée comme par exemple les gyroscopes, un problème important pose l'assurance d'un fonctionnement stabile.

Prof. dr. doc. ing.; Lecteur dr. ing., Chaire de Mécanique de précision

Parmi les solutions utilisées avec succès on compte aussi la réalisation de lobes sur coussinet, figure 1.

Ce type de paliers présente l'avantage d'une technologie simple d'exécution aux dimensions relativement réduites des pièces (diamètres

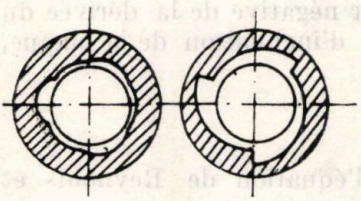


Fig. 1. — Le palier avec coussinet lobé

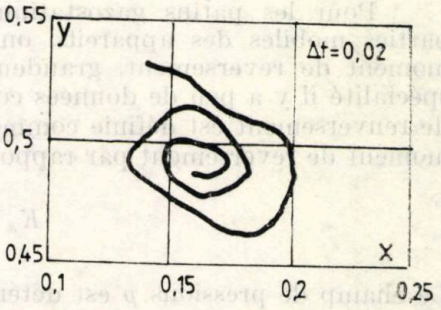


Fig. 2. — La trajectoire du centre du rotor pour un comportement stabile.

de 12 ... 24 mm). La profondeur des lobes est de (5 ... 10 μm) et les jeux radiaux sont de (2,5 ... 5 μm)— Quand les lobes sont executés sur le coussinet (donc sur la partie du palier), la distribution des pressions est donnée par l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(H^3 \delta \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H^3 \delta \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \Lambda \frac{\partial (pH)}{\partial (\theta)}$$

où l'hauteur H de l'interstice aura la forme :

$$H = (1 + \varepsilon \cos \theta) + \Delta (9\theta)$$

où $\Delta(\theta)$ représente l'interstice doué aux lobes.

Si la direction du chargement est variable (le cas de l'appareillage gyroscopique monté sur le véhicule), une variation des performances du palier avec la position n'est pas acceptable. La solution est donée par la réalisation des lobes sur la partie mobile. C'est le cas où surgissent des difficultés de calcul parce que H depend aussi du temps,

$$H = (1 + \varepsilon \cos \theta) + \Delta (\theta', t)$$

et la pression dans un point de l'interstice oscillera avec une fréquence égale à la fréquence de rotation du palier.

Donc, quand on traite le problème on doit suivre toutes les deux situations avec le coussinet fixe et le coussinet rotatif et vice-versa. On a proposé un traitement analytique-numérique du problème, en analysant les performances statiques et les conditions de stabilité du palier.

Une vérification des conclusions obtenues sur cette voie on peut réaliser par simulation sur le calculateur de la réponse dynamique du palier à une perturbation extérieure en suivant le trajet au centre du rotor Si le centre du tourillon tend vers un point qui correspond à la position du régime statique de fonctionnement, le rotor a un comportament stabile (figure 2).

Sur le stand d'un modele pratique de rotor on a effectué des mesures qui ont confirmé les conclusions théoriques obtenues par calcul.

3. Les paliers gazostatiques

Pour les patins gazostatiques employés comme support pour les parties mobiles des appareils, on intéresse aussi la rigidité envers un moment de reversement, grandeur pour laquelle dans la littérature de spécialité il y a peu de données concrétes. La rigidité envers un moment de renversement est définie comme une valeur négative de la dérivée du moment de reversement par rapport à l'angle d'inclinaison de la plaque,

$$K_a = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\alpha}$$

Le champ de pressions p est déterminé par l'équation de Reynolds et le moment de reversement est calculé comme :

$$M = \iint r\,(p - p_0)\,\mathrm{d}_x\,d_y,$$

présenté sans dimensions comme dans la relation :

$$\bar{M} = \frac{M}{L^3\,(p_s - p_0)}$$

où p_s est la pression d'alimentation et L est une longueur caractéristique pour l'élément du palier.

Pour déterminer cette grandeur pour une série vaste de configurations, on a fait des calculs numériques, en utilisant la méthode des diffé-

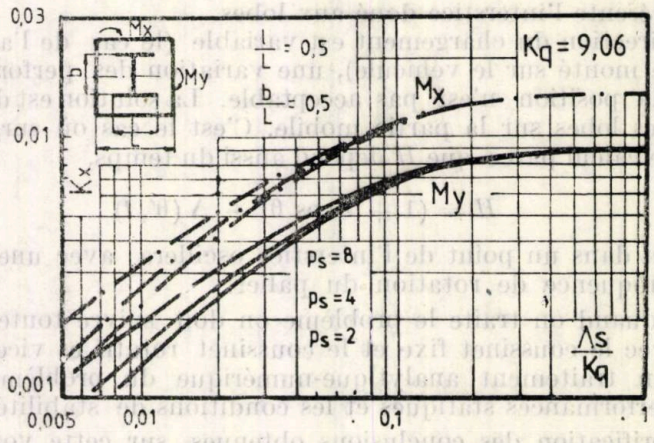


Fig. 3. — Le moment de reversement pour une configuration de patine gazostatique.

rences finites et en présentent les résultats du point de vue graphique, forme très accessible pour celui qui effectue des projets techniques, comme dans l'exemple illustré dans la figure 3.

Pour les paliers axiaux circulaires, alimentés par orifices, on a pu analyser l'influence de la position de la source d'alimentation sur la distribution des pressions et implicitement des performances du palier. Un exemple est présenté dans la figure 4 ou $\bar{W}$ est la capacité de chargement exprimée sans dimensions et $\bar{Q}$ est le débit du fluide consomé par le palier exprimé aussi sans dimensions.

Pour une géometrie d'alimentation déterminée (le paramètre $\Lambda_s = \frac{6\eta_l r_0^2 \sqrt{RT}}{p_s \cdot h^3}$ = constant), la position optime des sources (rayon r_0) dépend du critère optime choisi (portance maximale ou debit minimal) et aussi du nombre d'orifices d'alimentation.

Les résultats prouvent la possibilité d'une optimisation du positionement de ces orifices en fonction de différents critères (figure 4).

La synthese présentée met en évidence le champ vaste d'applications de la portance sur gaz pour les systèmes mobiles des appareils de la mécanique de précision et les problèmes qui doivent être solutionnés en respectant les particularités d'emploi.

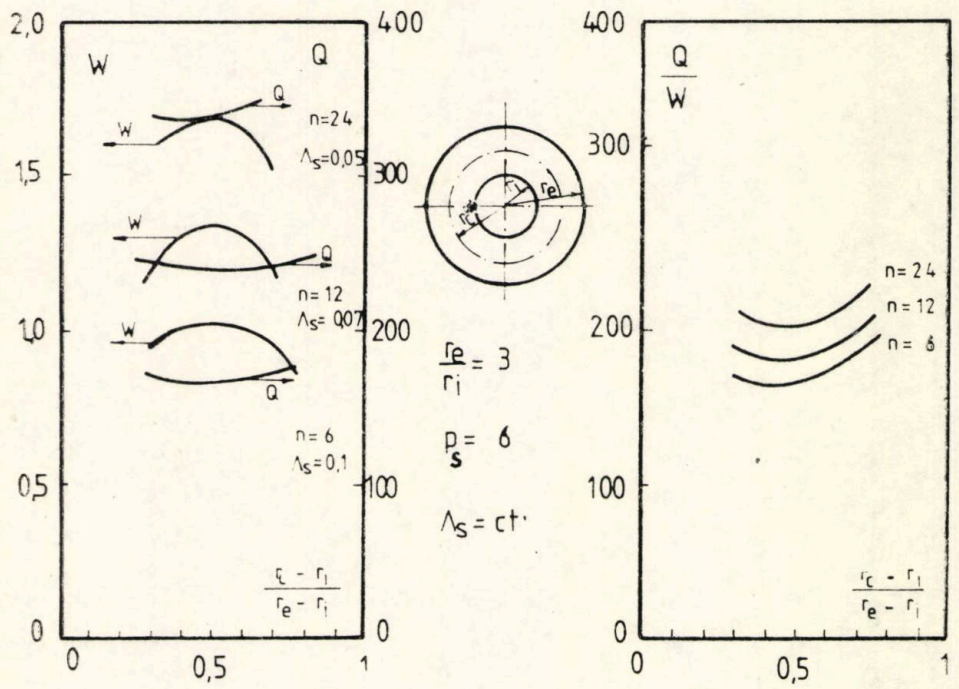


Fig. 4. — La position optimale des sourses pour les paliers axiaux circulaires.

BIBLIOGRAPHIE

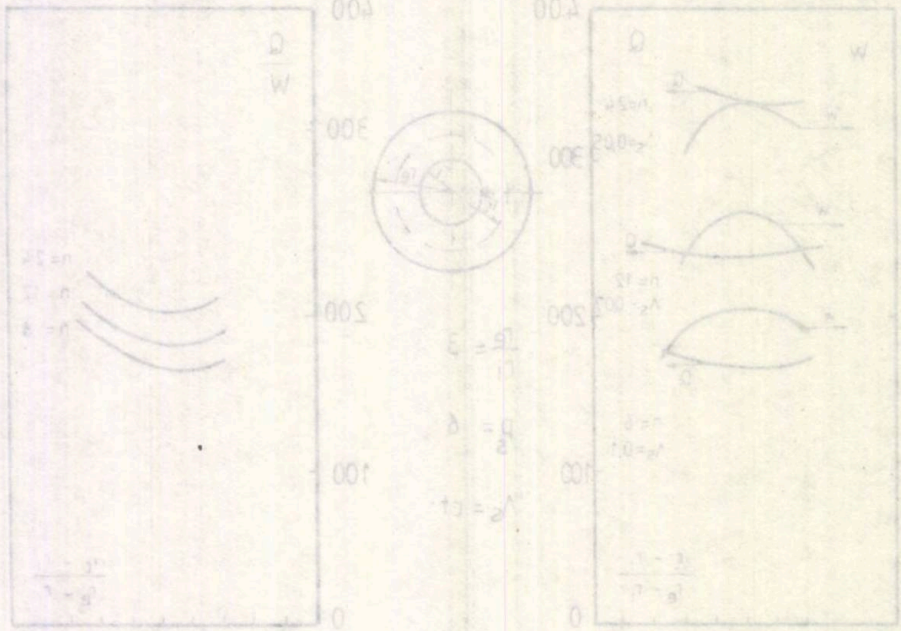
1. *T. Demian, A. Pascu*, Lagăre şi ghidaje pentru aparate, Ed. Academiei 1981
2. *T. Demian, A. Pascu*, Statische und dynamische Berechnung eines zylindrisches radiales hydrodinamisches gellaptes Gaslager, Eurotib 1977, Düsseldorf

3. *A. Pascu*, Dynamic behaviour of gas bearing IFTOMM 1977, București,
4. *T. Demian, A. Pascu*, Zur Anwendung hydrodynamischer Luftlager beim Bau von Kreisellaufern Feingerätetechnik nr. 4, 1978

Calculul și proiectarea lagărelor cu gaze pentru aparate

Lagărele cu gaze reprezintă în prezent o soluție constructivă tipică pentru sprijinirea părții mobile a unor aparate cum sînt giroscoapele, mesele rotative și ghidajele pentru aparatele de măsurat în coordonate, oferind acestora o precizie ridicată, rigiditate mare și înlăturarea uzurii.

În lucrare sînt prezentate pe scurt aspecte particulare privind calculul și proiectarea lagărelor cu gaze pentru o serie de aplicații care au făcut obiectul preocupărilor catedrei de mecanică fină din I. P. București.



C.Z.: 621.436: 662.767.1

ASPECTE DE ORDIN CINETIC ȘI FIZIC ALE ARDERII EMULSIILOR DE METANOL-MOTORINĂ IN MOTORUL DIESEL FUNCȚIONIND DUPĂ PROCEDEUL „M"

B. GRÜNWALD, N. APOSTOLESCU, G. PANĂ, N. NEGURESCU, M. POPA, D. NEDELCU
V. GHEORGHIU, B. RADU*.

Studiul arderii emulsiilor metanol-motorină într-un motor diesel funcționînd după procedeul M evidențiază o serie de manifestări aparent contradictorii. Aceste manifestări sînt analizate în lucrare sub aspect cinetic și fizic. Se accentuează astfel importanța aspectelor privind cinetica reacțiilor de oxidare, care alături de cele de ordin fizic și de aprindere, controlează performanțele motorului alimentat cu metanol și motorină.

Soluția alimentării motorului diesel cu emulsie motorină-metanol, aplicată în cadrul cercetărior întreprinse de Catedra de Motoare cu ardere internă din Institutul Politehnic București, în colaborare cu Centrul de Cercetare Științifică și Inginerie Tehnologică pentru Autocamioane Brașov, [1], [2], [3], a evidențiat anumite particularități ale procesului de ardere. Cunoașterea acestora ar permite dezvoltarea unor pîrghii de control al arderii, fie pentru a spori economia relativă de motorină (prin mărirea proporției de metanol în emulsie), fie pentru a spori economia absolută de combustibil (prin mărirea randamentului efectiv al motorului).

Apariția unor proporții limită de metanol în emulsie, semnalate în lucrarea [1], care la plină sarcină ajung la circa 30%, iar la sarcini reduse la 15—20% se corelează cu unele fenomene specifice de formare a amestecului, de aprindere și de ardere la motorul diesel cu cameră unitară de ardere.

Ar fi de așteptat ca proporțiile limită de metanol să fie, în primul rînd, condiționate de rezistența mare la autoaprindere a metanolului, astfel încît, prin creșterea întîrzierii la declanșarea arderii rapide $\Delta\alpha_d^{**}$, arderea să fie sensibil deplasată în destindere, cu consecințele inevitabile de reducere a randamentului și puterii, de creștere a gradului de fum din gazele de evacuare. Totuși, informațiile obținute de autori prin prelucrarea diagramei indicate și determinarea pe această cale a momentului declanșării arderii rapide (α_d) nu justifică ipoteza decît într-o măsură redusă. În adevăr, determinări efectuate pe un motor monocilindric

* Prof. dr. ing.; Prof. dr. ing.; Șef lucrări dr. ing.; Șef. lucrări dr. ing.; Șef. lucrări dr. ing.; Asist. dr. ing.; Asist.; Ing., catedra Motoare cu ardere internă

** α unghiul de rotație a arborelui cotit, în °RA

adecvat [4], arată că cifra cetanică (C.C.) a emulsiei motorină—metanol scade sensibil pe măsură ce creşte proporţia de metanol în emulsie — de exemplu, de la 54 la 32 unităţi, cînd proporţia de CH_3OH ajunge pînă la 30% (fig. 1).

Din cercetările efectuate pe motoare diesel cu camere unitare de ardere, cu formarea amestecului în volum, a rezultat că în asemenea condiţii, durata $\Delta\alpha_d$ creşte de la 6° la 15 °RA, adică de 2,5 ori. Cercetările autorilor evidenţiază rezultate diferite. Încercările au fost efectuate pe motorul diesel de autocamion D2156-HMN-8, iar momentul α_d a fost evidenţiat pe diagramele care precizează caracteristica de ardere (fig. 2a, 3a) şi viteza de ardere (fig. 2b, 3b). Motorul a funcţionat la o sarcină redusă, deci cu un regim termic mai mic, ceea ce ar fi trebuit să amplifice diferenţele între momentele α_d la funcţionarea cu motorină (fig. 2) şi la funcţionarea cu metanol (fig. 3). Cu toate acestea se observă că diferenţa dintre cele două momente este de 3—4° RA, ceea ce reprezintă o creştere de numai 30—40% a întîrzierii la declanşarea arderii rapide *. Această modificare redusă trebuie pusă parţial în corelaţie cu procedeul de ardere aplicat la motorul investigat, la care jetul de combustibil se injectează pe suprafaţa caldă a cupei din piston sub formă de peliculă, spre deosebire de procedeul de ardere cu formarea amestecului în volum, aplicat la motorul pentru determinarea cifrei cetanice.

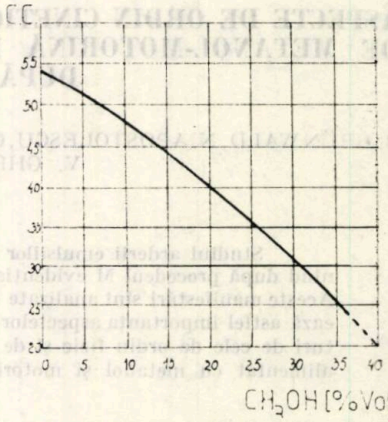


Fig. 1 — Variaţia cifrei cetanice a unei emulsii metanol-motorină, în funcţie de proporţia de metanol (după [4]).

După declanşarea arderii rapide, viteza de ardere atinge valori caracteristice pentru fiecare tip de cameră de ardere, corelată cu sistemul de injecţie şi mişcarea ordonată şi turbulentă generată pe ciclu. La creşterea întîrzierii la declanşarea arderii rapide cu cîteva grade RA, era de aşteptat ca viteza de ardere să se amplifice cu 10—15%. Şi de astă dată, investigaţia experimentală efectuată de autori indică un tablou diferit şi anume, în cazul metanolului o sporire a vitezei maxime de ardere ξ_{max} cu circa 70%, de la 0,075 la 0,125 (fig. 2, 3). Această manifestare a arderii nu a antrenat o sporire însemnată a solicitărilor statice şi dinamice, valorile presiunii maxime p_{max} şi vitezei maxime de creştere a presiunii $\dot{p}_{max}$ (tab. 1), diferă puţin, ceea ce se pune pe seama unei reduse deplasări a arderii în destindere.

Atrage atenţia o manifestare pozitivă a arderii şi anume reducerea duratei ei ($\Delta\alpha_{ard}$) de la 19° la 15°RA (valori caracteristice pentru sarcini reduse — coeficientul de sarcină $\varkappa = 0{,}4$).

* Caracteristicile şi vitezele de ardere au fost calculate prin prelucrarea unei diagrame medii, obţinută tabelar printr-un echipament de prelevare şi prelucrare automată a valorilor, precizate în 256 cicluri succesive.

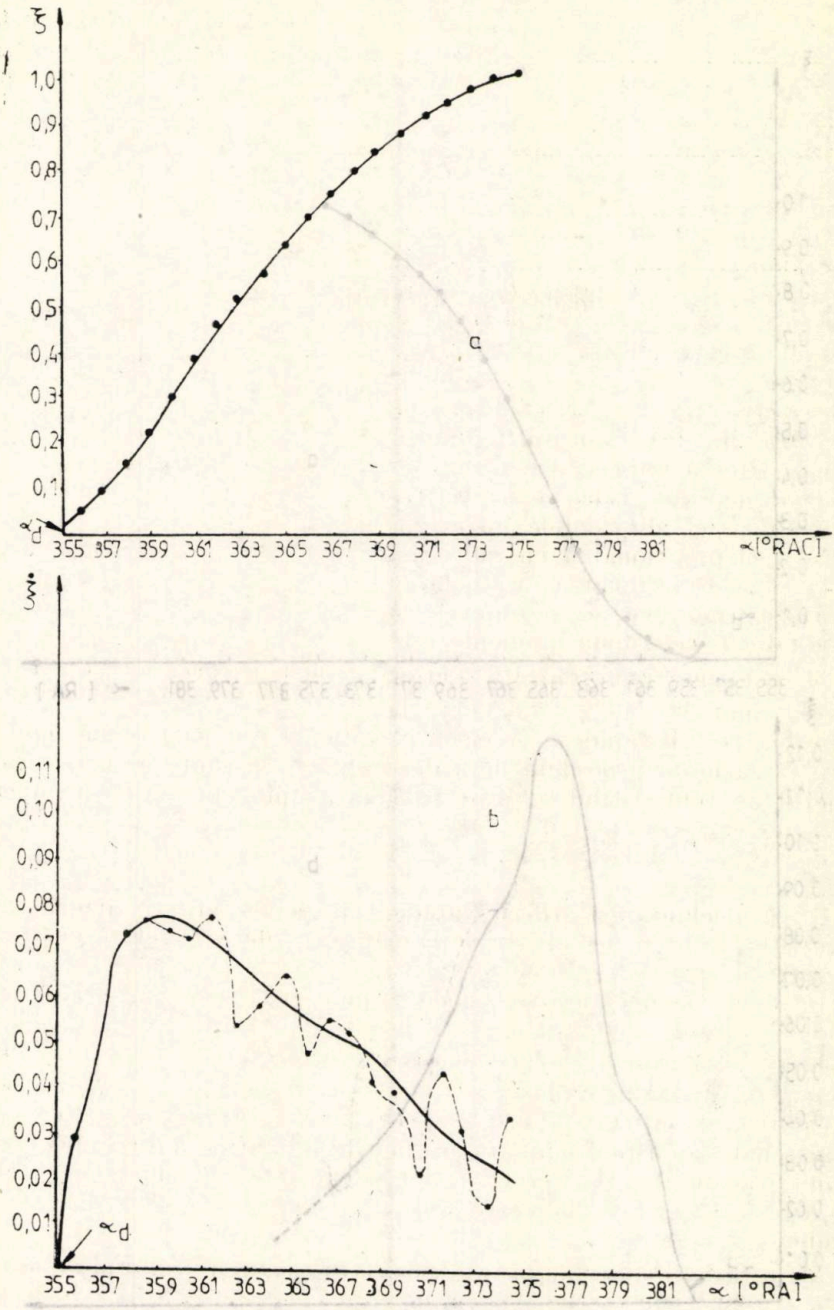


Fig. 2. — Caracteristicile degajării căldurii de reacție și viteza degajării căldurii de reacție, în cazul funcționării cu motorină, Motor D-2156-HMN-8, 40% sarcină, 1700 rot/min, coeficient de exces de aer $\lambda = 2{,}14$, temperatura de admisie $T_a = 318$ K,

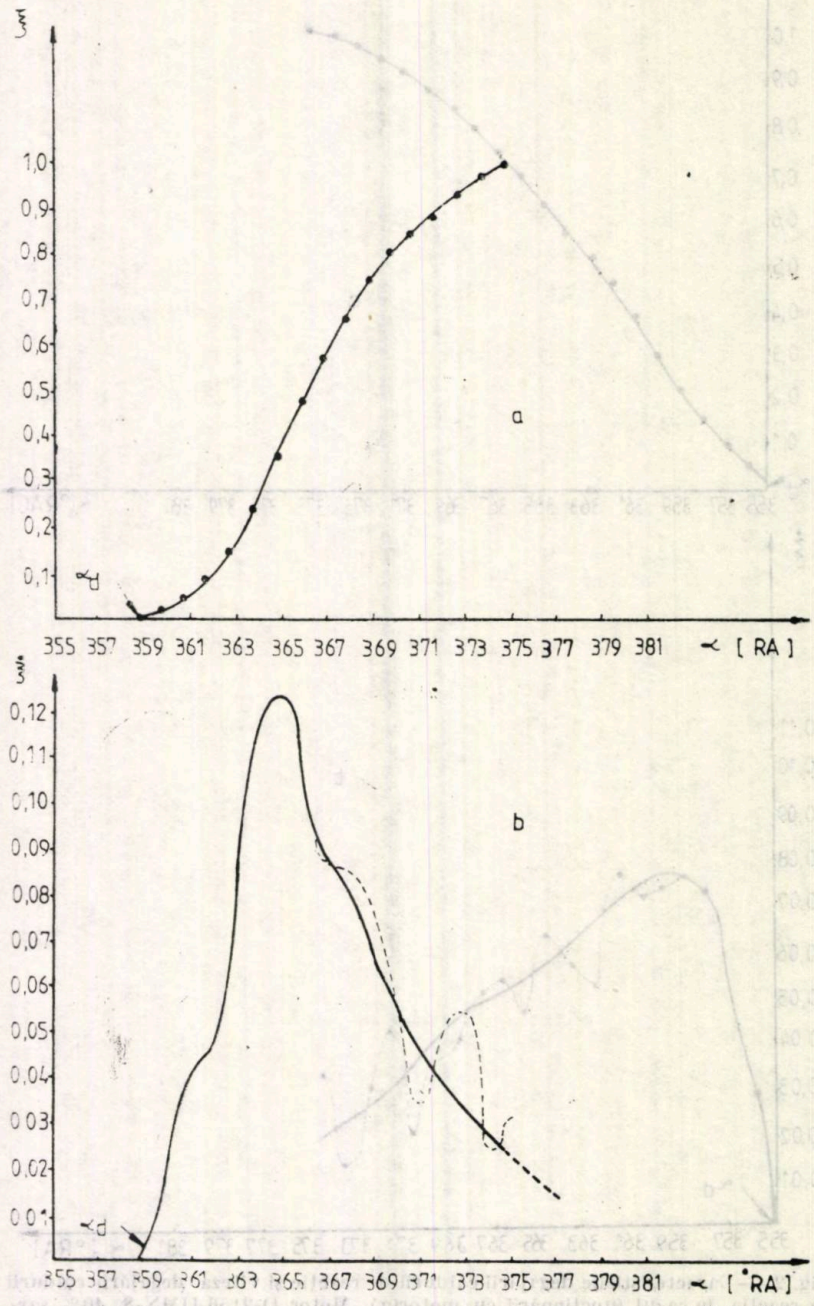


Fig. 3 — Caracteristica degajării căldurii de reacţie şi viteza degajării căldurii de reacţie, în cazul funcţionării cu o emulsie de 27% metanol în motorină. Celelalte condiţii ca în figura 2

Creșterea vitezei maxime de ardere și cu atît mai puțin reducerea duratei de ardere nu pot fi puse numai pe seama sporirii reduse a întîrzierii la declanșarea arderii rapide (sau întîrzierii la autoaprindere). Autorii consideră că cele două manifestări ale arderii emulsiilor reprezintă fapte fundamentale, care arată că în prezența metanolului, procesul de oxidare

Tabelul 1

Parametrul	Unit. de măsură	Motorină	Emulsie	Emulsie și RG
CH_3OH	%	27	27	27
α_s	°RA	−20	−20	−20
α_d	°RA	356	360	360
F_{max}	bar	75	70	64
α_{pmax}	°RA	367	370	369
p_{max}	bar/°RA	42	48	40
$p\,p_{max}$	°RA	358	364	365
$\Delta\alpha_{ard}$	°RA	19	15	17
T_a	K	318	318	356

α — avansul la producerea scînteii.

a combustibilului suferă modificări sensibile, determinate în mare măsură și de cinetica reacțiilor chimice. Această opinie se conturează dacă se are în vedere mecanismul cinetic de oxidare a metanolului, care a fost elaborat de Brown, citat în [5],. Din 28 reacții chimice posibile, Brown a alcătuit un model de reacție în lanț, care cuprinde 19 acte de reacție (tab. 2).

Tabelul 2

	Reacții chimice	A_j unit. c g.s.	n_j	E_j cal/mol
I	$M+CH_3OH=CH_3+OH+M$	4,5 E 15	0	67.900
II	$CH_3OH+O=CH_2OH+OH$	1,7 E 12	0	2.290
III	$CH_3OH+H=CH_3+H_2O$	1,3 E 13	0	5.300
IV	$CH_3OH+OH=CH_2OH+H_2O$	3,0 E 13	0	5.960
V	$CH_2OH=CH_2O+H$	3,0 E 09	0	29.000
VI	$CH_4+OH=CH_3+H_2O$	6,0 E 14	0	12.500
VII	$CH_3+O=CH_2O+H$	1,0 E 14	0	0
VIII	$CH_2O+OH=HCO+H_2O$	5,4 E 14	0	6.300
IX	$M+CH_2O=HCO+H+M$	1,0 E 14	0	36.800
X	$HCO+OH=CO$	1,0 E 14	0	0
XI	$M+HCO=CO+H+M$	5,0 E 14	0	19.000
XII	$H_2+OH=H_2O+H$	2,9 E 14	0	11.000
XIII	$O+H_2=OH+H$	3,2 E 14	0	15.000
XIV	$H+O_2=OH+O$	4,4 E 14	0	16.800
XV	$OH+OH=H_2O+O$	5,5 E 13	0	7.000
XVI	$CO+OH=CO_2+H$	4,0 E 12	0	8.000
XVII	$H+HO_2=OH+OH$	2,5 E 14	0	1.890
XVIII	$M+H+OH=H_2O+M$	8,4 E 21	−2	0
XIX	$M+H+O_2=HO_2+M$	1,5 E 15	0	−990

$$k_j = A_j\, T^{n_j} \exp\,(-E_j/RT)$$

Mecanismul de oxidare se declanșează prin patru reacții inițiale : prima, de tipul unei ciocniri cu o moleculă inertă M(I) ; următoarele trei, prin ciocniri cu radicalii O, H, OH (II, III, 1V). În etapa următoare (reacția V), radicalul CH_2OH se descompune și formează formaldehidă și hidrogen atomic. Se observă apoi că apariția oxidului de carbon, ca reacție intermediară a oxidării complete, se realizează prin reacțiile VIII și X, cu participarea radicalului activ OH. Aceste două reacții decurg cu viteză mare în raport cu reacțiile IX și XI, deoarece pretind energii de activare E_j foarte reduse. Faza finală de oxidare are loc prin reacția XVI, cu formarea de CO_2, tot prin intermediul radicalului OH.

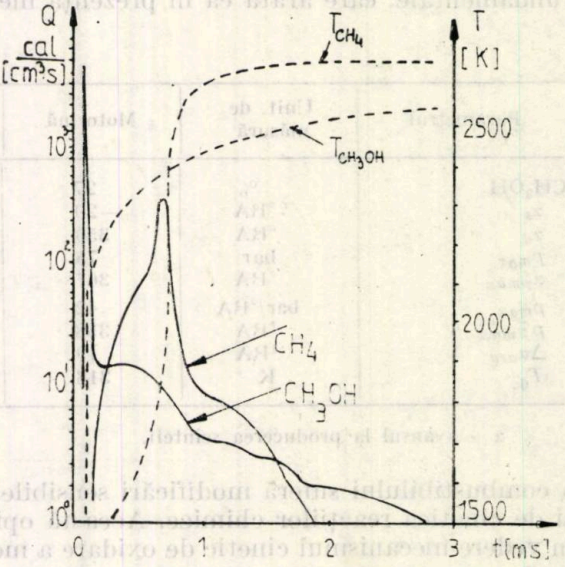


Fig. 4 — Viteza de degajare a căldurii de reacție și temperatura de ardere a metanului și metanolului, calculate pe baza mecanismelor specifice de oxidare după [5]).

Acest model de mecanism de reacții înlănțuite evidențiază, pe baza calculelor efectuate, o viteză inițială mare de oxidare pentru metanol care, pentru evaluare, s-a comparat cu viteza de oxidare a metanului, hidrocarbură cu proprietăți asemănătoare la aprindere cu a metanolului, deci cu cifră cetanică mică (fig. 4).

Modelul propus de Brown ar fi în măsură să explice vitezele mari de ardere obținute în cercetările autorilor pentru emulsiile de motorină-metanol (fig. 3.b) și reducerea substanțială a duratei de ardere.

Autorii opiniază totodată că același model de oxidare este în măsură să explice, cel puțin parțial, proporțiile limită de metanol în emulsie. Dacă se are în vedere, de exemplu, funcționarea motorului la sarcină totală, motorul dispune în acest caz de excese reduse de aer ($\lambda = 1{,}2 \ldots 1{,}3$). Cum reacția XIV ($H + O_2 = OH + O$) indică consumul oxigenului liber pentru producerea principalului radical (OH) care asigură ramificarea rapidă a lanțului de oxidare, rezultă că moleculele hidrocarburilor care alcătuiesc motorina vor găsi mai greu, la scara moleculară, oxigenul necesar pentru reacțiile de oxidare completă. În prezența unor excese mici de aer, motorina, deși inițiază aprinderea, arde apoi mai lent, durata arderii crește, performanțele se compromit, particulele de funingine formate în procesele de cracare și de hidrogenare nu se mai oxidează în destindere, la temperaturi reduse, determinînd o creștere sensibilă a gradului de fum. Această manifestare a arderii a apărut în încercările autorilor la funcționarea motorului la sarcină intermitentă, cu $\lambda = 1{,}2$.

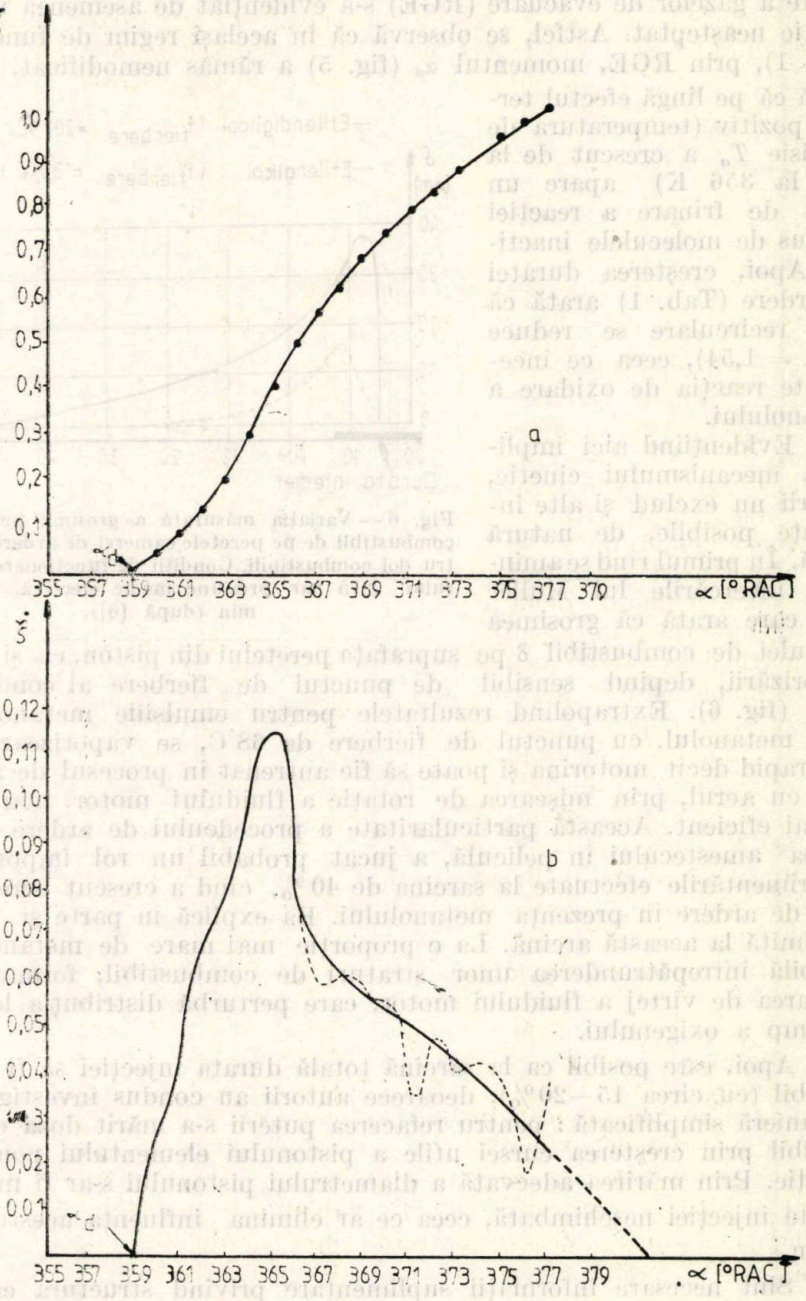


Fig. 5. — Caracteristica degajării căldurii de reacție și viteza degajării căldurii de reacție, în cazul funcționării cu o emulsie de 27% metanol cu motorină și cu recircularea parțială a gazelor de evacuare. Temperatura de admisie T_a = = 356K, coeficient de exces de aer $\lambda = 1{,}54$, celelalte condiții ca în fig. 2.

În fine, se semnalează faptul că la aplicarea procedeului de recirculare a gazelor de evacuare (RGE) s-a evidențiat de asemenea un efect cinetic neașteptat. Astfel, se observă că în același regim de funcționare (tab. 1), prin RGE, momentul α_d (fig. 5) a rămas nemodificat, ceea ce arată că pe lîngă efectul termic pozitiv (temperatura de admisie T_a a crescut de la 318 la 356 K) apare un efect de frînare a reacției produs de moleculele inactive. Apoi, creșterea duratei de ardere (Tab. 1) arată că prin recirculare se reduce O_2 ($\lambda = 1{,}54$), ceea ce încetinește reacția de oxidare a metanolului.

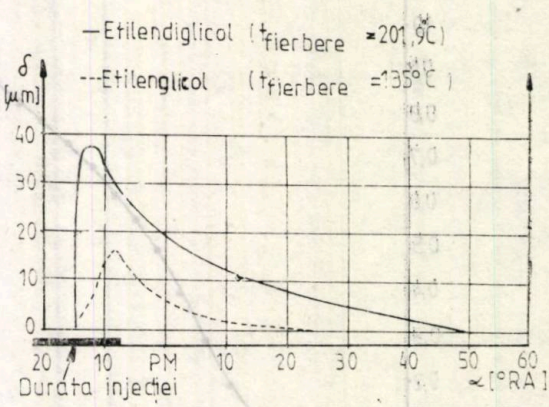


Fig. 6 — Variația măsurată a grosimii peliculei de combustibil de pe peretele camerei de ardere M, pentru doi combustibili. Condiții de funcționare a motorului 3,75 bar presiune medie efectivă, 1500 rot/min (după [6]).

Evidențiind aici implicația mecanismului cinetic, autorii nu exclud și alte influențe posibile, de natură fizică. În primul rînd se amintesc încercările lui Müller *[6]*, care arată că grosimea peliculei de combustibil δ pe suprafața peretelui din piston, ca și durata vaporizării, depind sensibil de punctul de fierbere al combustibilului (fig. 6). Extrapolînd rezultatele pentru emulsiile metanol-motorină, metanolul, cu punctul de fierbere de 68°C, se vaporizează mult mai rapid decît motorina și poate să fie antrenat în procesul de amestecare cu aerul, prin mișcarea de rotație a fluidului motor, mai repede și mai eficient. Această particularitate a procedeului de ardere cu formarea amestecului în peliculă, a jucat probabil un rol important în experimentările efectuate la sarcina de 40%, cînd a crescut sensibil viteza de ardere în prezența metanolului. Ea explică în parte și proporția limită la această arcină. La o proporție mai mare de metanol, este posibilă întrepătrunderea unor straturi de combustibil, formate prin mișcarea de vîrtej a fluidului motor, care perturbă distribuția locală și la timp a oxigenului.

Apoi, este posibil ca la sarcină totală durata injecției să fi crescut sensibil (cu circa 15—20%), deoarece autorii au condus investigația de o manieră simplificată: pentru refacerea puterii s-a mărit doza de combustibil prin creșterea cursei utile a pistonului elementului pompei de injecție. Prin mărirea adecvată a diametrului pistonului s-ar fi menținut durata injecției neschimbată, ceea ce ar elimina influența acestui parametru.

Sînt necesare informații suplimentare privind structura emulsiei, sub aspectul întrepătrunderii picăturilor celor doi combustibili și a modificării diametrului lor mediu, prin acțiunea forțelor de tensiune superficială.

În încheiere, se observă că pentru controlul procesului de ardere, care urmărește în primul rînd creșterea proporției de metanol în emulsie, trebuie să se aibe în vedere nu numai aspectul fizic al procesului (căldură mare de vaporizare a metanolului, vîscozitatea redusă) și cel privind aprinderea metanolului (cifra cetanică redusă la circa 3 unități) ci și aspectele legate de cinetica reacțiilor chimice de oxidare, care controlate rațional, ar permite sporirea performanțelor unui motor diesel alimentat cu emulsie motorină-metanol.

BIBLIOGRAFIE

1. *N. Apostolescu ș. a.*, Cercetări privind economia de motorină la alimentarea motoarelor diesel de autovehicul cu emulsii motorină-metanol. Conferința Națională de Energetică București 23—25 noiembrie 1983, C. 2122.
2. *B. Grünwald ș. a.*, Despre proporțiile limită ale metanolului în amestecul cu motorina pentru motorul diesel D -2156-HMN-8. A IV-a Conferință Națională de Motoare, Automobile și Tractoare. CONAT-Brașov, 1982.
3. *N. Apostolescu ș. a.*, Construcția de mașini 36, nr. 4 (1984)
4. *E. Annovi, ș. a.*, La Termotecnica, Vol. XXXV Nr. 3 — 1981.
5. *G. Carelli, A. D'Alessio*, La Rivista dei Combustibili, Vol. XXXII, fasc. 4, aprile 1978
6. *E. Müller*, Gemischbildung im Dieselmotor bei Kraftstoffwandanlagerung. Dissertation Darmstadt 1976, D-17.

Kinetical and Physical Aspects of the Methanol-Gas Oil Emulsions Combustions in a M-Diesel Engine

Combustion research of methanol-in-gasoil emulsion in a M-diseel engine put in evidence some aspects seeming contradictory. These aspects are analyzed in this work on a kinetical and physical basis. Thus, the importance of the oxydation reactions kinetics is emphasized ; together with the physical and the ignition processes, they govern the performances of an engine fueled with methanol-gasoil emulsions.

C.Z.: 621.926: 66.043.52

ASPECTE ALE INTRODUCERII MORILOR VENTILATOR LA MĂCINAREA MATERIALELOR NEMETALIFERE (CRETA ȘI ARGILA)

N. PĂNOIU, L. MIHĂESCU, I. OPREA*

Lucrarea prezintă rezultatele introducerii la scară industrială a morilor de tip ventilator la măcinarea materialelor nemetalifere.

1. Etapele modernizărilor liniilor de măcinare a cretei de la SM Basarabi prin introducerea morilor ventilator cu ciocane

Din anul 1980, stația de măcinare a cretei de la Basarabi din cadrul Intreprinderii Miniere Dobrogea—Constanța, funcționează cu linii de măcinare a cretei cu mori ventilator cu ciocane de 9 și 17 t/h, mori destinate prin proiect măcinării cărbunilor. Introducerea acestor mori a apărut ca o necesitate pentru satisfacerea actualelor cerințe ale planului de producție și de reducere a consumurilor specifice de energie (pe tona de produs); vechile mori aveau un debit de maximum 1 t/h, cerînd uscare în prealabil în uscătoare cu tambur rotativ, cu consumuri de energie ridicate.

Pentru introducerea morilor ventilator cu ciocane la măcinarea cretei (compoziție medie anhidră: $CaCO_3 = 92\%$, $SiO_2 = 2—5\%$, glauconit, limonit, sulfură de fier, oxizi de fier, oxizi de titan, restul de 3—4%, cu o umiditate variind în limitele a 11—17%) s-au efectuat cercetări de măcinare-uscare pe moara pilot de 0,2 t/h de la Inst. Politehnic București (catedra Cazane și turbine) și pe moara pilot de 5 t/h de la ICSITEE.

Crearea noilor linii de măcinare a cretei s-a făcut în 3 etape:

— în prima etapă s-au implementat morile ventilator cu ciocane în vechile linii de preparare a cretei. Introducerea acestor mori ce realizează în paralel măcinarea și uscarea, a dus la desființarea uscătoarelor rotative amplasate între generatoarele de gaze calde și mori. Captarea materialului măcinat s-a realizat cu ajutorul unor filtre mecanice de tip ciclon, iar ca element antipoluant s-au folosit filtre umede. În fig. 1, se prezintă o linie de măcinare a cretei după etapa I de transformare.

— în etapa II-a, s-au introdus separatoarele morilor, cu efecte pozitive asupra caracteristicii de măcinare-uscare a morii și electrofiltre în locul filtrelor umede, cu un efect antipoluant evident și cu o creștere a producției de material cu cea mai ridicată finețe.

* Conf. dr. ing.; Șef lucrări dr. ing.; Asist.. ing., catedra Cazane și turbine

— în etapa III, s-au pus la punct parametrii de funcţionare în vederea reducerii consumurilor specifice de energie. În paralel, s-au făcut şi cercetări de trecere de la combustibilul lichid uşor la combustibil solid (reziduu de la prepararea cocsului). Alte modernizări au constat în scoa-

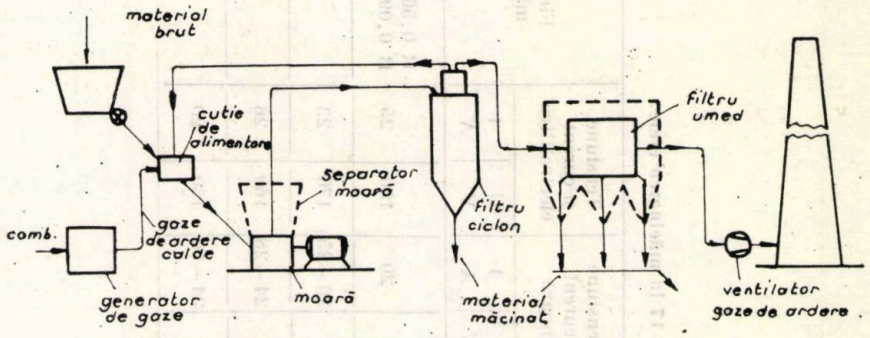


Fig. 1. Schema fluxului tehnologic la măcinarea cretei cu ajutorul morilor ventilator cu ciocane (MVC) de la SM Basarabi;

——— Schema în etapa II-a a transformărilor:
— — — Schema în ultima etapă a modernizărilor.

terea reductorului morii MVC 9 şi cuplarea acesteia direct cu un motor la 1000 rot/min. De asemenea, în anul 1983 s-a realizat şi prima linie de măcinare complet izolată termic, acţiune ce va fi încheiată în anul 1984.

2. Comportarea morilor ventilator cu ciocane la măcinarea cretei

Debitul morilor se realizează în funcţie de capacitatea de uscare, efectul de măcinare nefiind hotărîtor datorită friabilităţii mărite a materialului. Ca urmare, pentru moara MVC 9 s-au putut realiza debite de pînă la 12 t/h, iar pentru moara MVC 17 de pînă la 22 t/h. În fig. 2 se prezintă caracteristica teoretică de funcţionare a morii MVC 17 la măcinarea lignitului de proiect (umiditate totală $W_t^i = 43\%$, cenuşă la starea iniţială $A^i = 24{,}5\%$), faţă de care s-a precizat şi domeniul de funcţionare pentru cretă. Se remarcă o foarte mare apropiere a caracteristicii de funcţionare a morii la cretă faţă de cărbunele de proiect, cu consecinţe favorabile asupra consumurilor de energie electrică. În tabelul 1, se prezintă parametrii de funcţionare ai liniilor de măcinare în funcţie de caracteristicile cretei (umiditate brută).

Debitul de combustibil se reglează în funcţie de temperatura la finele generatorului de gaze calde, această temperatură trebuind să fie în domeniul a 900—1000°C.

Pentru reducerea consumurilor energetice la prepararea cretei, esenţială este realizarea unei încărcări cît mai mari şi uniforme a morilor în timp, la circa 12 t/h pentru moara MVC 9 şi la circa 19—20 t/h pentru moara MVC 17.

În tabelul 2, se prezintă variaţia puterii electrice şi a consumului specific de energie electrică în funcţie de debit, pentru moara MVC 17

Tabelul 1

Valorile medii ale parametrilor funcţionali ai morilor MVC-9 şi MVC-17 la măcinarea cretei.

Tipul morii	Anotimpul	Debit efectiv t/h	Umid. intrare %	Umid. ieşire %	Temp. fine generator °C	Temp. intrare electrofiltru °C	Tensiune şi curent moară		Tensiune şi curent electrofiltru		Fineţe de măcinare
							U kV	I A	U V	I A	
MVC-9	vară	12	14–14,5	0,5–0,9	1000	75	6	20	150	25	R 0,56=0,01 % R 0,09=5,7–5,8%
	iarnă *)	10–12	15–15,3	0,5–1	900–1000	100–120	6	20–25	170	23	,,
MVC-17	vară	19–20	14–14,5	0,5–0,9	1000	75–80	6	24–28	160	26	,,
	iarnă **)	18–20	15–15,3	0,5–1	900–1000	120–150	6	24–30	150	20	,,

*) umiditatea în lunile de iarnă ale anului 1983 a fost foarte scăzută.
**) această linie de măcinare este complet izolată termic.

Tabelul 2

Variația puterii electrice și a consumului specific de energie electrică în funcție de debitul morii MVC-17

Debit t/h	0	5	10	15	17	20
P_t, KW	120	125	128	140	155	190
Concentrație praf, kg/m³	0	0,12	0,24	0,37	0,40	0,50
P_v, KW	120	120	120	120	120	120
e, KWh/t	—	25	12,8	9,33	9,11	9,50

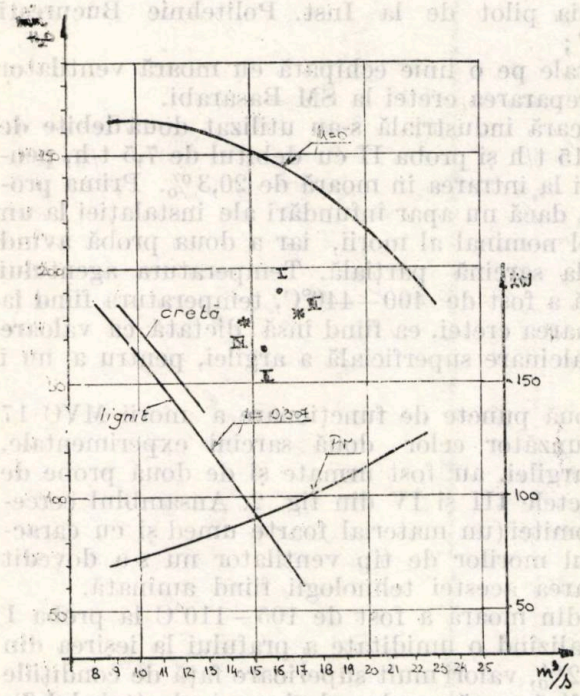


Fig. 2. Punctele de funcționare a morii MVC 17 la măcinarea cretei față de caracteristica morii pentru lignitul de proiect (în desen sînt marcate și punctele obținute la experimentările de măcinare a argilei și diatomitei).

P_t, P_v — puterea totală și respectiv de ventilație; e — consumul specific de energie electrică.

Se remarcă scăderea consumului specific de energie electrică odată cu creșterea debitului morii pînă la debitul nominal, urmată apoi de o ușoară creștere a acesteia la debite mai mari.

Apare însă un cîștig total, din consumul mai redus de combustibil pentru uscare la debite mai mari, precum și din puterile electrice mai reduse necesare consumurilor interne, ventilației și desprăfuirii.

Producția realizată prin captarea de material la electrofiltru a fost în medie de 3—4% din debitul captat la filtrele ciclon, finețea prafului fiind însă foarte ridicată, rezultînd materialul de cea mai bună calitate.

Pentru anul 1983, consumurile energetice la uscarea și măcinarea cretei au fost:

— consum combustibil lichid ușor — 19,48 kg combustibil la tona de cretă măcinată, față de consumul normat de 20,35;

— consumul de energie electrică — 20,19 KWh/t cretă măcinată, față de cel normat de 20,50 KWh/t.

Se face menţiunea, că începînd cu finele lunii noiembrie, 1983, o mare parte din consumul de combustibil, a fost trecut pe combustibil solid, constituit din reziduuri de la producerea cocsului metalurgic.

3. Cercetări de măcinare a argilei cu ajutorul morilor de tip ventilator

Din analiza fluxului tehnologic de măcinare şi uscare a argilei la sectorul miner Medgidia, s-a pus problema înlocuirii actualei scheme cu una simplă, asemănătoare celei de la prepararea cretei la SM Basarabi (fig. 1), prin introducerea morilor ventilator cu ciocane, mori cu o productivitate mai mare şi cu consumuri de energie mai reduse.

Cercetările experimentale au fost efectuate în două etape :

— cercetări pe instalaţia pilot de la Inst. Politehnic Bucureşti catedra „Cazane şi turbine";

— cercetări experimentale pe o linie echipată cu moară ventilator cu ciocane de 17 t/h de la prepararea cretei la SM Basarabi.

În cursul probelor la scară industrială s-au utilizat două debite de argilă, proba I cu debitul de 15 t/h şi proba II cu debitul de 7,5 t/h, pentru o umiditate a materialului la intrarea în moară de 20,3%. Prima probă a avut scopul de a verifica dacă nu apar înfundări ale instalaţiei la un debit cît mai apropiat de cel nominal al morii, iar a doua probă avînd rolul verificării funcţionării la sarcină parţială. Temperatura agentului de uscare la intrarea în moară a fost de 400—440°C, temperatura fiind la limita inferioară pentru măcinarea cretei, ea fiind însă dictată ca valoare de evitarea fenomenului de calcinare superficială a argilei, pentru a nu i se altera plasticitatea.

În fig. 2 se prezintă două puncte de funcţionare a morii MVC 17 la măcinarea argilei, corespunzător celor două sarcini experimentale. Experienţele de măcinare a argilei, au fost urmate şi de două probe de măcinare a diatomitei — punctele III şi IV din fig. 2. Ansamblul cercetărilor pentru măcinarea diatomitei (un material foarte umed şi cu caracteristici de lipire) cu ajutorul morilor de tip ventilator nu s-a dovedit convingător avantajos, aplicarea acestei tehnologii fiind amînată.

Temperatura la ieşirea din moară a fost de 105—110°C la proba I şi 145—160°C la proba II, realizînd o umiditate a prafului la ieşirea din moară de 1,8% şi respectiv 1,2%, valori mult superioare faţă de condiţiile de livrare ale argilei şi care indică următoarele valori nominale (tabelul 3).

Tabelul 3

Caracteristicile de livare ale argilei

Caracteristici	Sortul A	Sortul B
Umiditate produs finit	10%	10%
Rest sită 0,1 mm	10%	20%
Rest sită 0,063 mm	15%	30%

Rezultatele fineței de măcinare așa cum arată datele din tabelul ce urmează, (tabelul 4), recomandă de asemenea acest tip de moară la măcinarea argilei (Se menționează faptul că finețea de măcinare realizată a fost pentru cazul unei mori fără separator de particule cum a fost cea de la SM Basarabi; separatorul poate fi luat în considerație la morile de la SM Medgidia).

Tabelul 4

Caracteristicile argilei obținută la probele experimentale

Caracteristici	Rezultate obținute
Umiditate produs finit	1,1—1,8%
Rest sită 0,1 mm	5,2—5,8%
Rest sită 0,056 mm	8,5—9,9%

În continuare, s-a determinat debitul de gaze de ardere dat de generatorul de gaze de la SM Medgidia, pentru compararea acestuia cu cel cerut de moara ventilator, deoarece capacitatea de măcinare depinde foarte mult de caracteristica de ventilație a morii. S-au făcut de asemenea și analize ale consumurilor specifice de energie electrică, și de combustibil, pentru cazul actualei linii tehnologice și pentru cea viitoare cu moară ventilator cu ciocane. S-a hotărît, ca o moară ventilator cu ciocane de 9 t/h (MVC 9) să înlocuiască 3 mori actuale cu debitul unitar de 2,5 t/h.

Măsurătorile debitului de fluid maximum au indicat 11,4 m^3/s, mai mare decît cel nominal al morii de 7,40 m^3/s, dar în limite de bună funcționare. Concentrația fazei solide a fost $\mu = 0{,}22$, fiind foarte redusă, sub valoarea de proiect a morii MVC 9 pentru cărbune la care $\mu = 0{,}307$. Pentru măcinarea cu consumuri reduse de energie a argilei, se recomandă scăderea debitului de fluid, concentrația recomandată a fazei solide fiind în domeniul $\mu = 0{,}50—1{,}00$.

4. Concluzii

Prin introducerea morilor ventilator, schema fluxurilor tehnologice de uscare-măcinare a materialelor nemetalifere s-a simplificat mult. A dispărut astfel tamburul uscător rotativ, un element mare consumator de metal și energie. Faptul că moara ventilator cu ciocane creează o suprapresiune la refulare de 100—150 mm H_2O, ajută transportului pneumatic, dispărînd o serie de ventilatoare aflate în vechea schemă. Toate aceste simplificări în fluxul tehnologic s-au făcut simțite în reducerea consumurilor specifice de energie electrică.

Consumul de metal pentru măcinare a scăzut, scăzînd de asemenea și cerința de calitate a oțelului pieselor supuse eroziunii la morile ventilator față de vechile mori cu ciocănele care solicitau oțel de arc.

Introducerea electrofiltrelor, a redus simțitor poluarea, dar a dus și la captarea fracției fine de cretă, materialul cel mai scump al procesului de preparare.

Faptul că aceste materiale sînt friabile și nu au un exagerat conținut de umiditate, a permis funcționarea cu un debit mărit peste cel nominal (dat pentru lignit), astfel că productivitatea a crescut simțitor, cu reducerea în același timp a consumurilor de energie.

Rezultatele obținute la măcinarea cretei și argilei cu ajutorul morilor de tip ventilator, pot constitui un punct de referință pentru noi cercetări și aplicații a acestor tipuri de mori și în alte domenii.

Aspects of Introducing Fan Mills for Crushing Non-Metalliferous Materials (Chalkstone and Clay).

This paper points out the results of introducing on industrial scale of fan-type mills for crushing non-metalliferous materials.

C.Z. : 621.82

ASUPRA REALIZĂRII LAGĂRELOR AUTOPORTANTE PLANE CU CANALE SPIRALE PENTRU APARATE.

T. DEMIAN, A. PASCU, V. POSTELNICU*

Dintre modalităţile de prelucrare a canalelor spirale pentru lagărele autoportante lucrarea analizează în special prelucrarea în plasmă cu fascicul de ioni, tehnologie prin care au fost executate o serie de piese. Probele funcţionale efectuate pe un model acţionat pneumatic au demonstrat actualitatea acestei soluţii tehnice.

Introducere

Lagărele cu canale spirale constituie una din soluţiile de mare interes [1] utilizate în vederea asigurării regimului de frecare fluidă la sprijinirea rotorilor cu turaţii înalte. Constructiv, în prezent se folosesc asemenea lagăre cu suprafeţe plane, cilindrice, conice, sferice. În figura 1 este prezentată geometria unui lagăr plan cu canale spirale, pentru care aspectele legate de calculul portanţei şi optimizarea geometriei au fost analizate într-o lucrare anterioară [2].

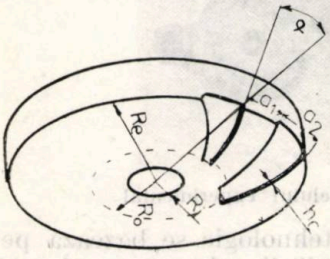


Fig. 1 — Geometria lagărului plan cu canale spirale

Modalităţi de realizare a canalelor spirale

Particularitatea constructivă a lagărului axial plan o constituie canalul, de forma unei spirale logaritmice şi cu adîncimea de ordinul 5 ... 10 μm care trebuie realizat în porţiunea activă a plăcii. Materialul acesteia trebuie să posede o rezistenţă mecanică bună, în special o duritate mare, astfel încît să suporte regimul de frecare uscată prezent în perioadele de pornire şi oprire. De asemenea sînt de dorit materialele cu o structură omogenă şi rezistente la coroziune. Cel mai adesea se utilizează oţeluri aliate, de tipul celor pentru rulmenţi sau materiale sinteri-

* Prof. dr. docent ; Şef lucrări dr. ing., catedra Mecanică fină ; Ing., Intrep. de echipamente periferice Bucureşti

zate bazate pe oxizi de aluminiu. În materialele cu caracteristicile menţionate, canalele spirale se pot executa prin prelucrarea mecanică directă, de tipul rectificării, pe maşini speciale cu cinematica similară celor pentru prelucrarea roţilor dinţate cu dantură spiralată ; prin sablare mecanică sub mască, precum şi prin tehnologii moderne ca electroeroziunea, atacul chimic, prelucrarea în plasmă cu bombardament ionic sau cu ioni activi. Dintre variantele tehnologice menţionate ultimele s-au dovedit ca fiind cele mai avantajoase pentru a prelucrarea lagărelor cu canale spirale de dimensiuni mici (cum sînt cele pentru aparatura giroscopică), deoarece asigură o calitate superioară a suprafeţelor, în condiţiile unei reproductibilităţi foarte bune a rezultatelor. După mai multe încercări, metoda asupra căreia ne-am oprit a fost prelucrarea în plasmă cu fascicul de ioni.

Prelucrarea în plasmă cu fascicul de ioni

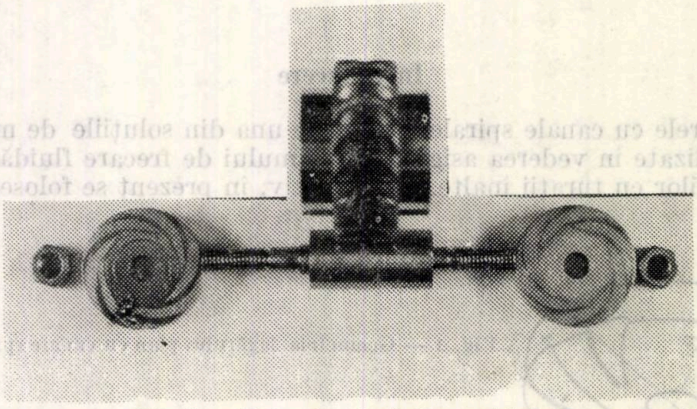
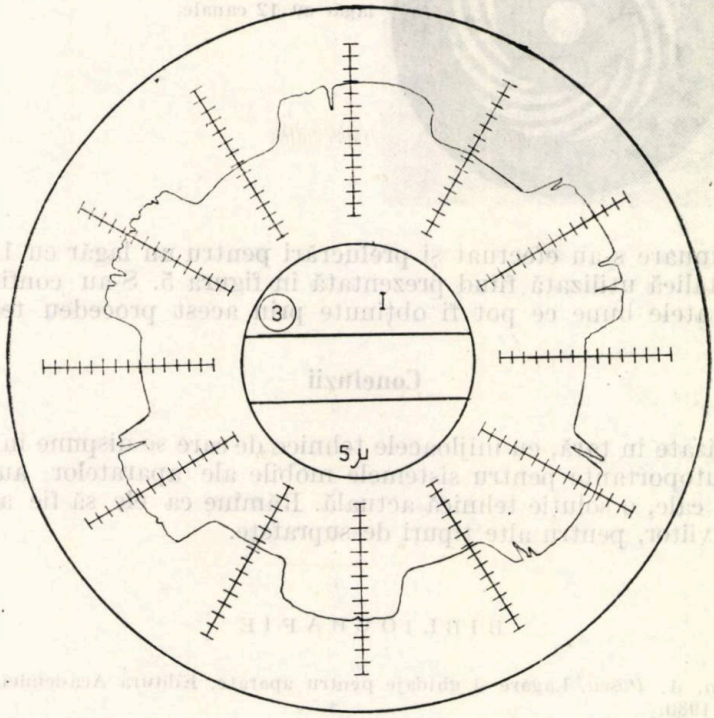


Fig. 3. — Rotorul şi lagărele modelului experimental

Realizarea canalelor prin acest procedeu tehnologic se bazează pe bombardarea suprafeţei de prelucrat de către ionii din plasmă, accelerați către zona canalului, rezultînd astfel o pulverizare a materialului în locul de impact. Îndepărtarea de material numai din zonele prestabilite, corespunzătoare canalului spiral se obţine prin folosirea unei măşti metalice avînd degajări cu un profil adecvat. S-a încercat iniţial confecţionarea măştilor pe cale fotografică. pe un fotorezist depus pe suprafaţa piesei (clişeul este ilustrat în figura 2), dar temperaturile ridicate din zona de lucru nu au permis acest procedeu. De aceea s-a recurs la confecţionarea unei măşti metalice, din tablă cu grosime de 0,2 . . . 0,5 mm, prelucrată prin electroeroziune cu fir. Configuraţia abordată la început a avut 6 canale, alegere motivată pe de o parte de calculul teoretic şi programul rulat pentru o astfel de geometrie [2], iar pe de altă parte de faptul că masca cu un număr redus de canale putea fi confecţionată mai uşor.

Fig. 2 — Clişeu pentru mască cu 6 canale.

Lagărele realizate au fost supuse unor probe funcționale, utilizîndu-se rotor acționat pneumatic — fig. 3. S-au obținut rezultate bune care confirmă posibilitățile de apilcare a tehnologiei utilizate. Este de remarcat uniformitatea de adîncime a canalelor pusă în evidență prin măsurători pe aparate tip Talyrond și Talystep (figura 4).



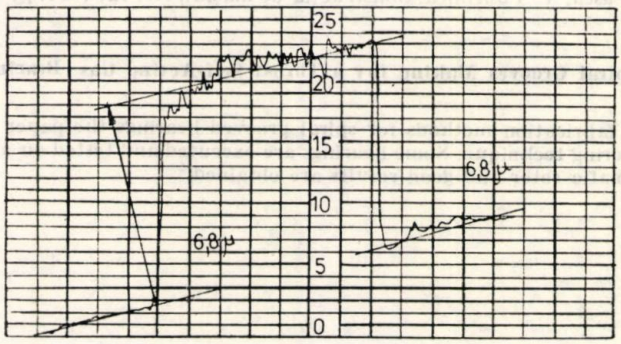


Fig. 4 — Măsurători ale profilului canalelor spirale.

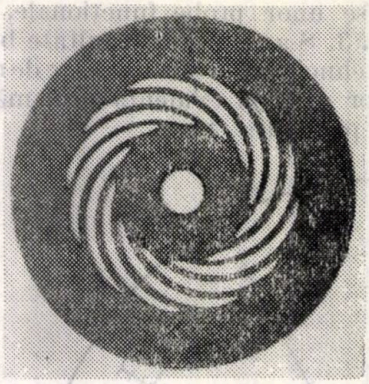


Fig. 5 — Mască metalică pentru un lagăr cu 12 canale.

În continuare s-au efectuat şi prelucrări pentru un lagăr cu 12 canale, masca metalică utilizată fiind prezentată în figura 5. S-au confirmat din nou rezultatele bune ce pot fi obţinute prin acest procedeu tehnologic.

Concluzii

Realizate în ţară, cu mijloacele tehnice de care se dispune în prezent, lagărele autoportante pentru sistemele mobile ale aparatelor au devenit pe această cale, o soluţie tehnică actuală. Rămîne ca ele să fie aplicate şi extinse în viitor, pentru alte tipuri de suprafeţe.

BIBLIOGRAFIE

1. *T. Demian, A. Pascu*, Lagăre şi ghidaje pentru aparate, Editura Academiei, Bucureşti 1980.
2. *T. Demian, A. Pascu, V. Postelnicu*, Construcţia de maşini, Nr. 12, 1984, p. 662.

Spiral Grooves Making for a Thrust Self-Acting Gas Bearing

Between the fabrication methods for spiral grooved bearings the paper discuss the ion sputtering technique. Some bearings are executed and tested on a set-up with a pneumatic rotor and good results are obtained.

C.Z.: 621.43 : 662.75

THE CARNOT CYCLE AS A POSSIBLE CYCLE FOR A PRACTICAL ENGINE

D. TARAZA *

Present day efforts to improve thermal engines efficiency and to widen the possible fuel assortments, by external combustion, have increased the interest to evaluate the suitability of the high efficiency cycles (regenerative or even Carnot cycles) to be used in practical engines. This paper defines the characteristic parameters of a Carnot cycle (total and isothermal compression ratios) and analyses the correlations between these parameters and the cycle performances : efficiency, specific work (mean indicated pressure) and maximum pressure The existence of optimum values for these parameters is demonstrated and their functional dependences are computed and plotted. In comparison with the Carnot cycle, the properties of a Stirling regenerative cycle are also analysed, for different values of the regeneration factor. It comes out, that from the standpoint of power density and ability to control engine load, the regenerative cycle is more appropriate than the Carnot cycle.

The energy crisis has brought into focus all kinds of possibilities to improve the efficiency of thermal engines and to loosen the requirements imposed on physical and chemical properties of the fuels. Consequently, in the last years, more and more research work has been carried on with the aim to develop external combustion engines, working in accordance with regenerative cycles (mostly Stiriling) and an increased number of inventors have patented even engines which are trying to approximate, more or less accurate, a Carnot cycle.

The present paper is intented to explore the properties of the Carnot cycle-versus regenerative cycles — from the standpoints of a practical engine. This analysis is carried on in accordance with the usual assumptions, considering the working fluid as an ideal gas with constant heat capacities.

As it is known, a Carnot cycle (fig. 1) is composed from an isothermal compression (1—2), involving abstraction of heat (Q_{out}); an adiabatic compression (2—3), an isothermal expansion (3—4), involving addition of heat (Q_{in}) and an adiabatic expansion (4—1). The efficiency of this cycle has the maximum possible value because it reduces to a minimum its thermodynamic losses :

$$\eta = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{\tau} \qquad (1)$$

As it is seen from relation (1), the efficiency of the Carnot cycle depends only on the temperature ratio $\tau = T_3/T_1$.

* Associated Professor Ph. D., Chair of Internal Combustion Engine

În order to be able to compete with a clasical internal combustion-engine, a Carnot engine must realise, together with a high efficiency, a convenient value of its specific work**in the range of values characterising a modern diesel engine.

Starting from a given state of the working fluid (p_1, V_1) and limiting the maximum pressure level $p_{max} = p_3$, an infinity of Carnot cycles can be realised between the pressure swing $p_1 - p_3$ (fig. 2).

The characteristic parameters of a Carnot cycles, occurring inside a given pressure swing, are the following;

$$- \varepsilon = V_1/V_3, \text{ the total compression ratio,} \tag{2}$$

$$- \varepsilon_T = V_1/V_2, \text{ the isothermal compression ratio,} \tag{3}$$

$$- \varepsilon_Q = V_2/V_3, \text{ the adiabatic compression ratio.} \tag{4}$$

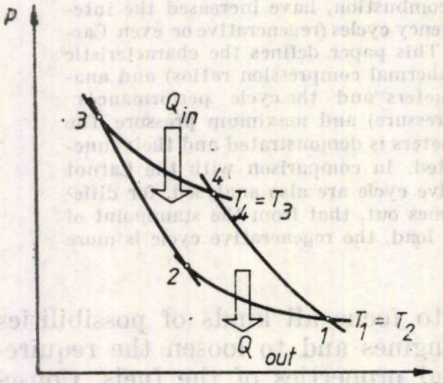


Fig. 1

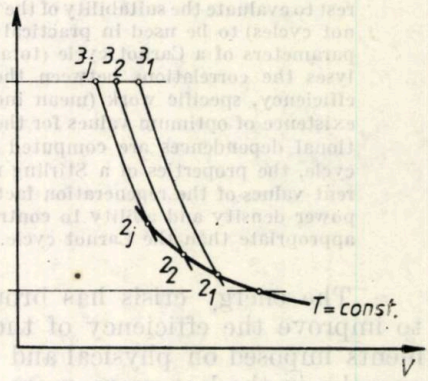


Fig. 2

For a given engine, it is sufficient to indicate only the values for two such compression ratios, because these are correlated by the following relation :

$$\varepsilon = \varepsilon_T \varepsilon_Q. \tag{5}$$

Based on the equations of isothermal and adiabatic evolutions; with notations (2) and (3), the temperature ratio (τ), the pressure ratio (π) and the efficiency (η) of the Carnot cycle may be expressed as :

$$\tau = \frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right)^{\varkappa - 1} \tag{6}$$

$$\pi = \frac{p_{max}}{p_{min}} = \frac{p_3}{p_1} = \varepsilon_T \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right)^{\varkappa} = \varepsilon_T \tau \tag{7}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\tau} = 1 - \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\right)^{\varkappa - 1} \tag{8}$$

One can see that, for a given maximum pressure, the efficiency may be increased by increasing the total compression ratio and decreasing the isothermal compression ratio.

** The work done by the unit volume of the engine displacement, usually refered as the mean indicated pressure of the cycle.

The work done during a cycle is :

$$W_{cicl} = W_{3-4} + W_{4-1} - W_{1-2} - W_{2-3} =$$

$$= p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3} + \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] - \tag{9}$$

$$- p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} - \frac{p_3 V_3}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\varkappa-1}\right],$$

and, because the adiabatic evolutions take place between the same temperature swing ($T_2 = T_1$ and $T_3 = T_4$), relation (9) becomes :

$$W_{cil} = p_1 V_3 \varepsilon \left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] \ln \varepsilon_T \tag{10}$$

and the ratio of the mean cycle pressure[1] ($\bar{p}$) to the minimum pressure p_{min}) is :

$$\frac{\bar{p}}{p_{min}} = \frac{W_{cil}}{p_1(V_1 - V_3)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] \ln \varepsilon_T. \tag{11}$$

The analysis of relation (11) points out that the relative mean pressure ($\bar{p}/p_{min}$) is a function of the total compression ratio ε, as well as of the isothermal compression ratio ε_T. Consequently, from all Carnot cycles, characterized by a given value of the total compression ratio ε, only one will maximize the specific work (the mean pressure) and that would happen for a well determined value of the isothermal compression ratio ε_T. This value is given by the extremum of function (11), obtained by setting equal to zero its derivative with respect to ε_T :

$$\frac{d}{d\varepsilon_T}\left(\frac{\bar{p}}{p_{min}}\right) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_T}\left\{1 - [1 - (\varkappa - 1)\ln \varepsilon_T]\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right)^{\varkappa-1}\right\} = 0,$$

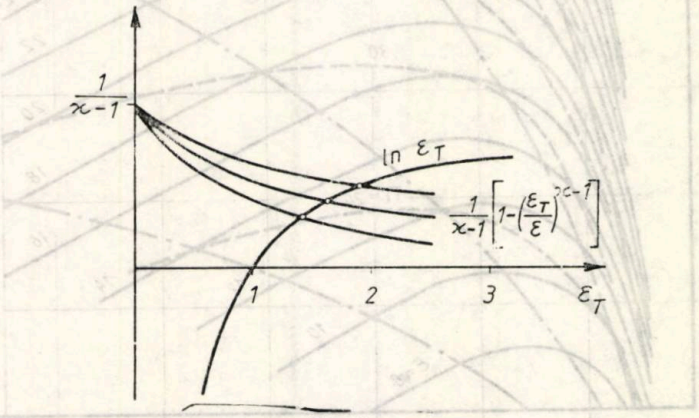


Fig. 3

[1] The specific work of the cycle.

which reduces to :

$$\ln \varepsilon_T = \frac{1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right)^{\varkappa - 1}\right]. \tag{12}$$

In figure 3 is shown the image of the numerical method used to solve the transcendental eqation (12). One can notice that the in-

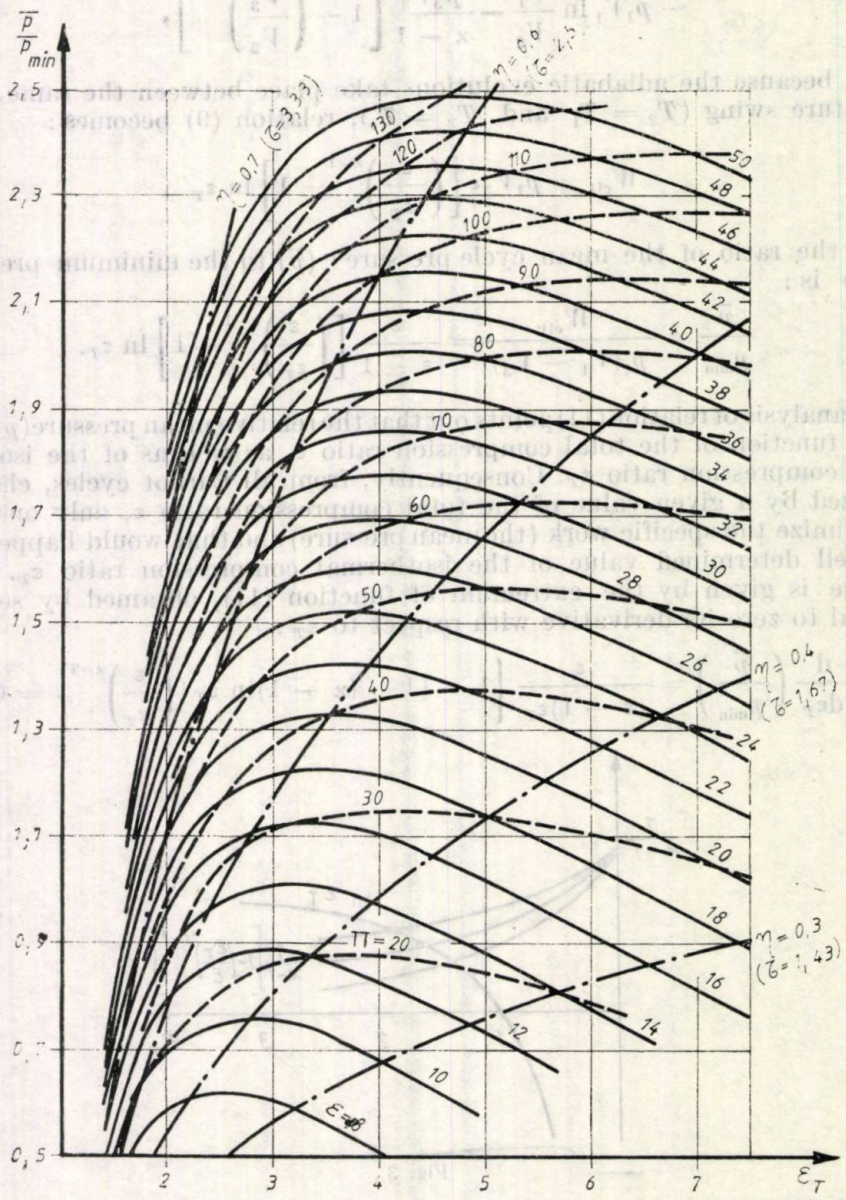


Fig. 4

crease of the total compression ratio ε requires also the increase of the optimum value of the isothermal compression ratio ε_T in order to maximize the specific work of the cycle.

A complex maping of the Carnot cycle properties ($\bar{p}/p_{min}$, η p_{max}/p_{min}) in their dependence on the cycle characteristics (ε, ε_T) is shown in figure 4.

The analyses of this figure points out a very disadvantageous characteristic of the Carnot engine : its very low value of the specific work. Thus, the value of the relative mean pressure ($\bar{p}/p_{min}$) varies from 1.0 to 2.5 for a variation of the total compression ratio (ε) from 14 to 50, while, for total compression ratios less than 14 the mean pressure remains inferior to the minimum pressure of the cycle ($\bar{p} < p_{min}$).

The increase of the total compression ratio, in order to increase the specific work, leads to a rapid increase of the relative maximum pressure of the cycle ($\pi = p_{max}/p_{min}$). A high value of the maximum pressure implies a heavy construction of the engine, due to the increase of the mechanical load on its parts. In order to illustrate this situation, a Carnot engine with a total compression ratio $\varepsilon = 40$ is considered. According to figure 4, the isothermal compression ratio should take a value $\varepsilon_T = 4$ in order to obtain an efficiency $\eta = 0.6$ (corresponding to a temperature ratio $\tau = 2.5$), a relative mean pressure $\bar{p}/p_{min} \cong 2.15$ and a relative maximum pressure $\pi = 100$. Such an engine, working with a minimum pressure close to the atmospheric value ($p_{min} \cong 0.1$ *MPa*) would reach a maximum pressure $\bar{p}_{max} \cong 10$ MPa and a mean pressure $\bar{p} \cong 0.215$ MPa. For comparison, a lightly supercharged diesel, having the same maximum pressure, realizes a mean indicated pressure $p = (0.9 \div 1.0)$ MPa and an indicated efficiency $\eta = 0.45 \div 05$. In order to reach the same output as the diesel, the Carnot engine should have a displacement, almost 5 times larger than the diesel engine. Thus,an icrease of about 20% of the thermal efficiency would require an almost 5 times increase of the engine overall dimensions.

This situation suggest that a Carnot engine, in order to increase its specific work, should use a pressurized gas as a working fluid. Thus, according to figure 4, choosing $\varepsilon = 20$ and $\varepsilon_T = 2$ the efficiency is maintained at $\eta = 0.6$ ($\tau = 2.5$), while the relative mean and maximum pressures are decreased at $\bar{p}/p_{min} \cong 1.11$ and, respectively, at $p_{max}/p_{min} \cong 50$. Limiting the maximum pressure of this cycle to the same value : $p_{max} = 10$ MPa, the minimum pressure willrise to $p_{min} \cong 0.2$ MPa and the mean one to $\bar{p} \cong 0.22$ MPa. One can notice that, using a pressurized gas in a closed cycle, an increase of the specific work may be achieved without diminishing the cycle efficiency.

The next problem that must be solved is to determine the optimum values of the parameters set ε and ε_T, which maximizes the specific work, maintaining constant the efficiency and the maximum pressure.

According to (4), (11) and (5), (3) the following relationship between the cycle parameters is obtained :

$$\frac{\bar{p}}{p_{max}} = \eta(1-\eta)^{\frac{1}{\chi-1}} \frac{\ln \varepsilon_T}{\varepsilon_T - (1-\eta)^{\frac{1}{\chi-1}}} \tag{13}$$

The maximum value of the function $(\bar{p}/p_{max})$, for a constant efficiency, is specified by the value of the isothermal compression ratio, which nullifies the derivative of (13) with respect to ε_T :

$$\frac{d}{d\varepsilon_T}\left(\frac{\bar{p}}{p_{max}}\right) = \eta(1-\eta)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{1 - \frac{(1-\eta)^{\frac{1}{\varkappa-1}}}{\varepsilon_T} - \ln \varepsilon_T}{\left[\varepsilon_T - (1-\eta)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\right]^2} = 0 \qquad (14)$$

Condition (14) is fulfilled by the solution of the transcendental equation :

$$\ln \varepsilon_T = 1 - \frac{(1-\eta)^{\frac{1}{\varkappa-1}}}{\varepsilon_T} \qquad (15)$$

Solving this equation by numerical methods, the data recorded in table 1 are computed. These data point out that an increase of the cycle efficiency leads to a rapid decrease of its specific work. Consequently a Carnot engine, which would realize an efficiency comparable to the best values attained by present day diesels, should have a 5 to 10 times larger displacement than the diesel.

Table 1

Parameters of Carnot cycles, optimized for maximum specific work

η	ε_T	ε	p_{max}/p_{min}	$\bar{p}/p_{min}$	$\bar{p}$(for p_{max} = 10MPa)
0.4	2.424	8.69	14.49	0.667	0.460 MPa
0.5	2.535	14.34	28.68	1.000	0.349 MPa
0.6	2.615	25.84	64.60	1.500	0.232 MPa
0.7	2.669	54.14	180.48	2.334	0.129 MPa

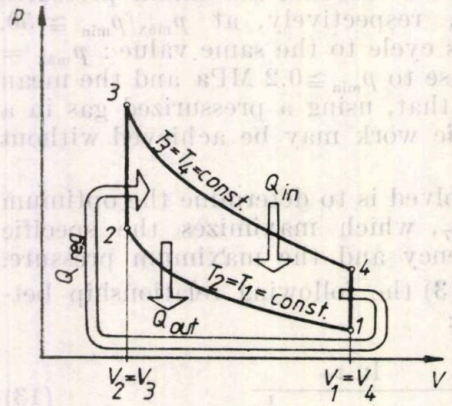


Fig. 5

Another possibility to achieve higher values of the thermal efficiency — theoretically identical to the values of the equivalent Carnot cycles—is offered by the use of regenerative cycles of the Stirling type.

A regenerative Stirling cycle (fig. 5) is composed by an isothermal compression (1—2), with heat rejection to the cold source, a constant volume heating (2—3), using the heat supplied by the engine regenerator, an isothermal expansion (3—4), with heat addition from the hot source

and a constant volume cooling (4—1) with the heat being stored in the engine regenerator.

The parameters that characterize such a cycle are $\varepsilon = V_1/V_2$ (the compression ratio) and $\tau = T_3/T_2 = p_3/p_2$ (the temperature ratio). The work done during a cycle is:

$$W_{ciel} = W_{3-4} - W_{1-2} = p_1 V_1 (\tau - 1) \ln \varepsilon \qquad (16)$$

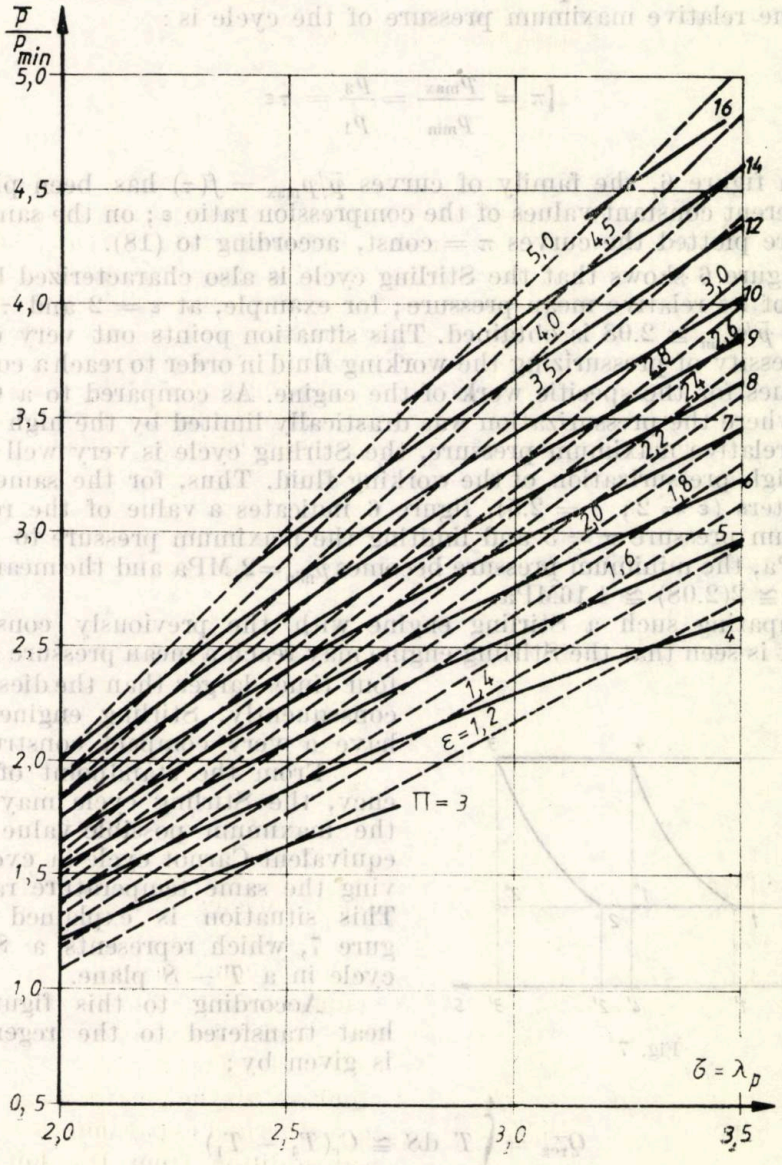


Fig. 6

and its relative mean pressure has the expression :

$$\frac{\bar{p}}{p_{min}} = \frac{W_{ciel}}{p_1(V_1 - V_2)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(\tau - 1)\ln \varepsilon \tag{17}$$

It is seen, from (17), that the relative mean pressure of this cycle increases with increasing compression and temperature ratios, according to a linear law with respect to τ when ε is maintained constant.

The relative maximum pressure of the cycle is :

$$\pi = \frac{p_{max}}{p_{min}} = \frac{p_3}{p_1} = \tau\varepsilon \tag{18}$$

In figure 6, the family of curves $\bar{p}/p_{max} = f(\tau)$ has been plotted, for different constant values of the compression ratio ε ; on the same diagram are plotted the curves $\pi = \text{const}$, according to (18).

Figure 6 shows that the Stirling cycle is also characterized by low values of its relative mean pressure; for example, at $\varepsilon = 2$ and $\tau = 2.5$ a value $\bar{p}/p_{min} \cong 2.08$ is obtained. This situation points out very clearly the necessity of pressurizing the working fluid in order to reach a convenient values for the specific work of the engine. As compared to a Carnot cycle, where the pressurization was drastically limited by the high values of the relative maximum pressure, the Stirling cycle is very well suited for a high pressurization of the working fluid. Thus, for the same cycle parameters ($\varepsilon = 2$; $\tau = 2.5$), figure 6 indicates a value of the relative maximum pressure $\pi = 5$ and limiting the maximum pressure to $p_{max} = 10$MPa, the minimum pressure becomes $p_{min} = 2$ MPa and the mean pressure $\bar{p} \cong 2(2.08) \cong 4.16$MPa.

Comparing such a Stirling engine with the previously considered diesel it is seen that the Stirling engine may reach a mean pressure almost four times larger than the diesel and, consequently, Stirling engines may have a very compact construction.

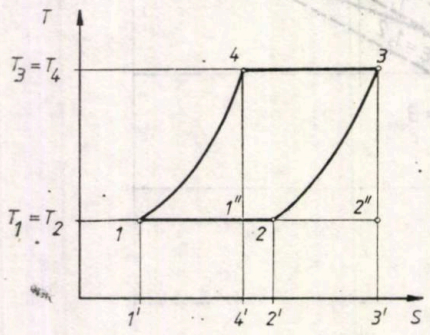


Fig. 7

From the standpoint of efficiency, the Stirling cycle may reach the maximum possible value of an equivalent Carnot cycle (a cycle having the same temperature ratio τ). This situation is explained in figure 7, which represents a Stirling cycle in a $T - S$ plane.

According to this figure, the heat transfered to the regenerator is given by;

$$Q_{reg}^{-} = \int_1^4 T\, dS \cong C_v(T_4 - T_1) \tag{19}$$

and is represented by the area 1', 1, 4, 4', while the heat taken from the regenerator is :

$$Q^{+}_{reg} = \int_{2}^{3} T\,dS \cong C_v(T_3 - T_2). \tag{20}$$

represented in the same figure by area 2', 2, 3,3'.

Because, in a $T - S$ plane, the constant volume curves are parallel, these heats are equal : $Q^{+}_{reg} = Q^{-}_{reg}$ and by superimposing area 1, 1, 4, 4' upon 2', 2, 3, 3', the equivalent Carnot cycle 1'', 4, 3, 2'' is obtained.Thus the efficiency of the Stiriling cycle is given by the same formula (1) ϵs the Carnot efficiency. This equivalence is valid as far as the regenerator works ideally, without heat losses ($Q^{+}_{reg} = Q^{-}_{reg}$). Actually, a regenerator is characterized by a regenerator factor ρ, whose magnitude is less than unity and :

$$Q^{+}_{reg} = \rho Q^{-}_{reg} \tag{21}$$

Relation (21) shows that the Stirling efficiency is actually inferior to the Carnot efficiency and depends upon the value of the regeneration factor ρ. The amount of heat, which is not recovered from the regenerator, must be supplied by the hot source :

$$Q_{in} = T_3(S_3 - S_4) + (1 - \rho)C_v(T_3 - T_2) \tag{22}$$

and the heat rejected to the cold source will include the regenerator losses :

$$Q_{out} = T_1(S_2 - S_1) + (1 - \rho)\, C_v(T_3 - T_2). \tag{23}$$

Consequently, the efficiency of an actual Stirling cycle will be :

$$\eta_s = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = \frac{1}{\dfrac{\tau}{\tau - 1} + \dfrac{1 - \rho}{(\varkappa - 1)\ln \varepsilon}} \tag{24}$$

Formula (24) points out that the efficiency of an actual Stirling engine decreases with the decrease of the regeneration factor ρ, the decrease being steeper for lower values of the compression ratio ε. This situation is illustrated in figure 8.

Consequently, the previously considered Stirling cycle ($\varepsilon = 2$; $\tau = 2.5$) has, for ideal regeneration ($\rho = 1$), an efficiency $\eta = 0.6$, independent from the value of the compression ratio ε, while, for a regeneration factor $\rho = 0{,}9$- the efficiency drops to $\eta \cong 0{,}49$ and for $\rho = 0.8$ to $\eta = 0.42$.

In conclusion, a Carnot engine exhibits a low attractiveness, as an industrial application, due to the very low value of its specific work. In addition, the load control of such an engine would be quite difficult, because

very rigid conditions must be fulfilled in order to realize Carnot cycles, along the whole range of the load variation.

On the contrary, the Stirling engine looks very attractive for industrial application because it associates to a very high specific output a

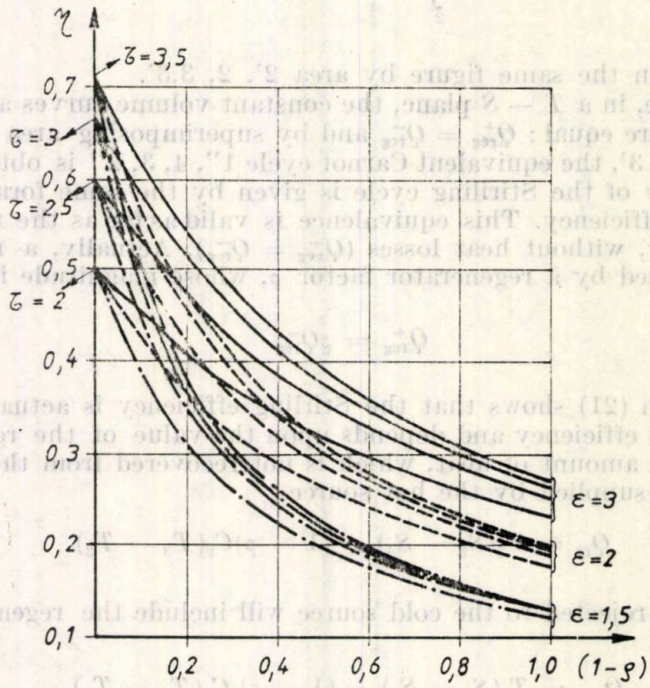


Fig. 8

high value of the thermal efficiency. Besides, due to the low values of the relative maximum pressures, the load control may be obtained by the variation of the gas quantity that works inside the engine.

Obviously, the competitiveness of the Stirling engine will be decided by the availability of reliable and profitable technologies and materials, by the improvement of the heat exchangers construction, especially of the regenerator, whose contribution in reaching a high value of the efficiency is essential.

REFERENCE

1. *G. Walker*, Stirling Engine, Clarendon Press — Oxford, 1980

Ciclul Carnot ca ciclu posibil pentru un motor termic

Tendințele actuale de îmbunătățire a randamentului motoarelor termice și de utilizare a unei game variate de combustibili prin adoptarea arderii externe au determinat un interes crescut pentru evaluarea posibilităților practice ale unor cicluri de randamente maxime (cicluri regenerative sau chiar ciclul CARNOT). În prezenta lucrare se definesc parametrii caracteristici ai ciclului Carnot (raportul de comprimare total și cel izoterm) și se analizează corelațiile dintre acești parametri

şi performanţele ciclului : randament, lucru mecanic specific (presiunea medie indicată) şi presiunea maximă. Se demonstrează existenţa unor valori optime ale acestor parametri şi se calculează şi se reprezintă grafic dependenţele funcţionale. respectiv. Pentru comparaţie cu ciclul Carnot se analizează şi performanţele unui ciclu regenerativ de tip Stirling, pentru diverse valori ale factorului de regenerare.

Se constată că din punct de vedere al densităţii de putere şi al posibilităţilor de reglare a sarcinii, ciclurile regenerative sînt mult mai avantajoase decît ciclul Carnot.

C.Z.: 539.3/.4: 620.22

ON A FREQUENCY DEPENDENT EIGENPROBLEM AND ITS USE IN STRUCTURAL MODELLING

M. RADEŞ *

The frequency dependent eigenproperties of the coincident dynamic flexibility matrix are used to derive classical normal vectors and real modal parameters for structures with nonproportional damping and high modal density. Numerical results from simulation of modal testing on a simple structural model are given to illustrate application of the method.

1. Introduction

In the past, frequency dependent eigenvalues and eigenvectors have been used mainly for determining appropriate force distributions for pure mode excitation in multiple shaker modal testing. Their use was considered impractical, requiring the solution of an eigenvalue problem at several excitation frequencies.

In recent years, use of frequency dependent modal characteristics has received increased popularity [1]. The method of characteristic phase lags [2] has been extended to use measured frequency response function data [3] as was the method of characteristic eigenvalues of the coincident response matrix [4].

A new structural identification method is presented herein which is based on the eigenproperties of the real part of the dynamic flexibility matrix. The only difficulty is the derivation of this matrix from measured response data. Promising results have been obtained applying the method to systems with small numbers of degrees of freedom.

2. Theoretical Background

Assume that the real structure can be modelled by an N-degree-of-freedom system and that its motion can be adequately described by a set of N linear differential equations with constant coefficients, written as

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \tag{1}$$

where $[M]$, $[C]$ and $[K]$ are real symmetric mass, damping and stiffness matrices respectively, $\{x\}$ and $\{f\}$ are displacement and force vectors respectively.

* Reader, dr. eng., Strength of Materials Chair.

For steady-state harmonic excitation with monophase forces $\{f(t)\} = \{\hat{f}\}\, e^{i\omega t}$, the vector of complex displacements has the form $\{x(t)\} = \{\tilde{x}\}\, e^{i\omega t}$, so that equation (1) gives

$$[[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]]\{\tilde{x}\} = \{\hat{f}\}, \qquad [B(i\omega)]\{\tilde{x}\} = \{\hat{f}\}. \tag{2}$$

The matrix

$$[B(i\omega)] = [B^R(\omega)] + i[B^I(\omega)] = [K] - \omega^2[M] + i\omega[C] \tag{3}$$

is defined as the *dynamic flexibility matrix* of the structure, being the inverse of the *frequency response function matrix* $[H(i\omega)]$.

Frequency dependent eigenvectors $\{y_\omega^{(r)}\}$ and eigenvalues $\lambda_r(\omega)$ of the real part $[B^R(\omega)]$ can be defined in the usual way, i. e., to satisfy the equation

$$[B^R(\omega)]\{y_\omega^{(r)}\} = \lambda_r(\omega)\{y_\omega^{(r)}\}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant N. \tag{4}$$

The eigenvalues $\lambda_r(\omega)$ can be expressed as roots of the determinantal equation

$$\det[[B^R(\omega)] - \lambda_r(\omega)[I]] = 0, \tag{5}$$

where $[I]$ is an $(N \times N)$ identity matrix.

Provided all values $\lambda_r(\omega)$ are different, it is straightforward to show that the eigenvectors $\{y_\omega^{(r)}\}$ satisfy the following orthogonality relationships:

$$\{y_\omega^{(r)}\}^T\{y_\omega^{(s)}\} = 0, \qquad r \neq s \tag{6, a}$$

$$\{y_\omega^{(r)}\}^T[B^R(\omega)]\{y_\omega^{(s)}\} = 0, \tag{6, b}$$

where the superscript T denotes the transpose operation.

The coincident dynamic flexibility matrix is singular at each undamped natural frequency ω_r:

$$\det[B^R(\omega_r)] = \det[[K] - \omega_r^2[M]] = 0, \qquad r = 1, \ldots, N.$$

The determinant of the matrix $[B^R(\omega)]$ can be expressed as a product of its eigenvalues

$$\det[B^R(\omega)] = \prod_{r=1}^{N} \lambda_r(\omega). \tag{7}$$

At $\omega = \omega_r$, one of the eigenvalues vanishes

$$\lambda_r(\omega_r) = 0. \tag{8}$$

The corresponding eigenvector $\{y_\omega^{(r)}\}$ becomes $\{y_{\omega_r}^{(r)}\}$, the latent vector of the matrix $[B_r(\omega)]$

$$[B^R(\omega_r)]\{y_{\omega_r}^{(r)}\} = \{0\}. \tag{9}$$

The only solution to equation (9) is

$$[B^R(\omega_r)]\{\Psi^{(r)}\} = [[K] - \omega^2[M]]\{\Psi^{(r)}\} = \{0\}, \qquad r = 1, \ldots, N \tag{10}$$

where $\{\Psi^{(r)}\}$ is the r-th classical normal mode. Equation (10) is the eigenproblem of the associate conservative system.

This shows that $\lambda_r(\omega)$ is that eigenvalue of $[B^R(\omega)]$ which vanishes at $\omega = \omega_r$ and $\{y_\omega^{(r)}\}$ is that eigenvector which becomes $\{\Psi^{(r)}\}$ at $\omega = \omega_r$.

The presented theory applies for any type of frequency dependent linear damping, including a combination of the viscous and hysteretic type.

Appropriated force distributions $\{\mathcal{F}^{(r)}\}$, which can excite pure undamped modes, are given by

$$[B^I(\omega_r)]\{\Psi^{(r)}\} = \{\mathcal{F}^{(r)}\}. \tag{11}$$

3. Identification of Modal Parameters

For "well-behaved" systems, with small number of degrees of freedom, the real part of the dynamic flexibility matrix can be obtained from measured transfer function data by using the conjunctive transformation.

$$[B^R(\omega)] = [H^*(\omega)]^{-1}[H^R(\omega)][H(\omega)]^{-1}, \tag{12}$$

where * denotes the complex conjugate and $[H^R(\omega)]$ is the real part of the frequency response function matrix.

The eigenvalues $\lambda_r(\omega)$ of the matrix $[B^R(\omega)]$ can be calculated at discrete frequencies and plotted versus frequency. Zeros of this plot indicate the undamped natural frequencies ω_r. The r-th eigenvalue λ_r vanishes only at the r-th undamped natural frequency. Equation (7) shows that the plot of $\det[B^R(\omega)]$ against frequency will also exhibit zeros at the undamped natural frequencies.

Having identified the natural frequencies ω_r and having determined $[B^R(\omega_r)]$ by either measuring the response at ω_r or calculating it by interpolation, the normal modes can be determined as the latent vectors of the real part of the dynamic flexibility matrix, as in (10).

The slope of the eigenvalue plot against frequency, at the point of zero crossing, is

$$\left.\frac{d\lambda_r}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = -\frac{2\omega_r m_r}{\{\Psi^{(r)}\}^T\{\Psi^{(r)}\}}. \tag{13}$$

If the eigenvectors are normalized to unit magnitude so that $\{\Psi^{(r)}\}^T\{\Psi^{(r)}\} = 1$, the modal mass is given by

$$m_r = -\frac{1}{2\omega_r}\left(\frac{d\lambda_r}{d\omega}\right)_{\omega_r}. \tag{14}$$

The modal damping coefficients are given by

$$c_{sr} = \frac{1}{\omega_r} \{\Psi^{(s)}\}^T [B^I(\omega_r)] \{\Psi^{(r)}\}, \tag{15}$$

where the imaginary part of the dynamic flexibility matrix is calculated from

$$[B^I(\omega)] = [H^*(\omega)]^{-1}[H^I(\omega)]\,[H(\omega)]^{-1} = -[B^R(\omega)]\,[H^I(\omega)]\,[H^R(\omega)]^{-1}.$$

The real part of the dynamic flexibility matrix is independent of damping. If it is caculated from measured frequency response data, then different sets of data, obtained for different amounts of damping artificially added to the system under test, must give the same matrix $[B^R(\omega)]$. Owing to the inversions from equation (12), the method probably fails for either large order systems or illconditioned frequency response matrices.

4. Numerical Results

The real part of the dynamic flexibility matrix for the two-degree-of-freedom system from figure 1 is

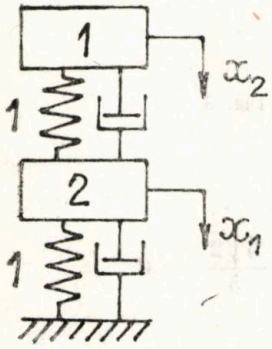


Fig. 1

$$[B^R(\omega)] = \begin{bmatrix} 3 - 2\omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - \omega^2 \end{bmatrix}.$$

The eigenvalues

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-3\omega^2 + 4 \pm \sqrt{\omega^4 - 4\omega^2 + 8})$$

and the determinant

$$\det [B^R(\omega)] = 2\omega^4 - 5\omega^2 + 2$$

are plotted against frequency in figure 2.

They vanish at the natural frequencies $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ and $\omega_2 = \sqrt{2}$.

The slopes of the eigenvalue plots at ω_1 and ω_2 are respectively

$$\left.\frac{d\lambda_1}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_1} = -\frac{6\sqrt{2}}{5}, \quad \left.\frac{d\omega_2}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_2} = -3\sqrt{2}.$$

If the eigenvectors $\{y_\omega^{(r)}\}$ are normalized to make the first element equal to unity, the "distribution coefficients" are

$$\mu_r(\omega) = \frac{y_2^{(r)}}{y_1^{(r)}} = 3 - 2\omega^2 - \lambda_r(\omega),$$

being presented in figure 3 as a function of frequency. At the undamped natural frequencies one obtains $\mu_1(\omega_1) = 2$ and $\mu_2(\omega_2) = -1$, so that

$$\{y_{\omega_1}^{(1)}\} = \{\Psi^{(1)}\} = \{1-2\}^T, \; \{y_{\omega_2}^{(2)}\} = \{\Psi^{(2)}\} = \{1 \quad -1\}^T.$$

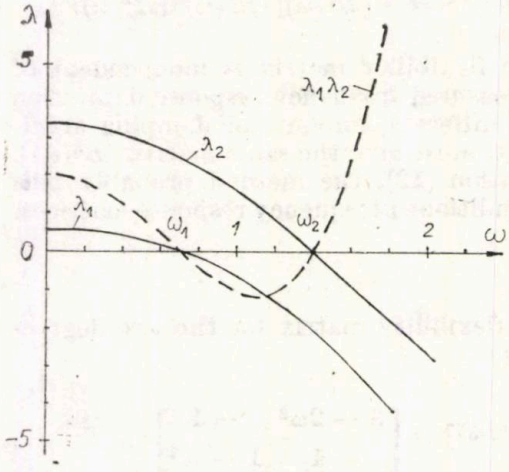


Fig. 2

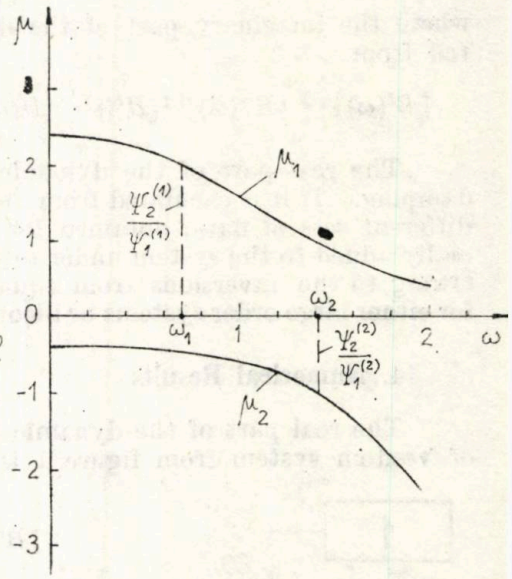


Fig. 3

The modal masses are

$$m_1 = \frac{\{\Psi^{(1)}\}^T\{\Psi^{(1)}\}}{2\omega_1}\left|\frac{d\lambda_1}{d\omega}\right|_{\omega_1} = \frac{\{1-2\}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}}{2\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{6\sqrt{2}}{5} = 6,$$

$$m_2 = \frac{\{\Psi^{(2)}\}^T\{\Psi^{(2)}\}}{2\omega_2}\left|\frac{d\lambda_2}{d\omega}\right|_{\omega_2} = \frac{\{1 \quad -1\}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}}{2\sqrt{2}}\,3\sqrt{2} = 3.$$

5. Conclusion

A modal identification method is presented, based on the solution of the eigenproblem of the real part of the dynamic flexibility matrix, which is independent of the system damping. Though it requires the solution of the eigenvalue problem at each excitation frequency of interest, the method has some advantages, being able to separate closely spaced undamped natural frequencies and to determine the corresponding modal vectors and modal masses irrespective of the type and amount of damping present in the system. This way, a modal model with nondiagonal modal

damping matrix can be set up from measured transfer function data, then the modal model with complex parameters and vectors can be analytically derived from it.

REFERENCES

1. *M. Radeş*, Shock and Vibration Digest, vol. 17, no. 6, p. 3—15 1985.
2. *B. F. de Veubeke*, Acad. R. Belgique, Bull. Classe Sciences, 5e serie, 34, 626—641 (1948).
3. *M. Radeş*, Buletinul I. P. B., Seria Construcţii de maşini, 1984—85 (In Romanian).
4. *M. Radeş*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., 26 (*4*), p. 605—622 (1981).

Asupra unei probleme de valori proprii dependente de frecvenţă şi utilizării ei la modelarea structurală

Se prezintă o metodă de identificare structurală bazată pe studiul dependenţei de frecvenţă a valorilor şi vectorilor proprii ai părţii reale a matricei flexibilităţii dinamice. Aplicarea metodei este ilustrată prin date numerice calculate pentru un sistem cu două grade de libertate.

C.Z.: 681 : 621.78 : 535.145

ASUPRA DURIFICĂRII SUPERFICIALE LOCALE CU LASER PENTRU ELEMENTE CONSTRUCTIVE DE MECANICĂ FINĂ

T. DEMIAN, O. DONȚU*

În articol sînt abordate o serie de aspecte privind tratamentul termic local cu laser cu emisie în impulsuri, pentru piese de mecanică fină din oțel.

Durabilitatea unor elemente constructive de mecanică fină este strîns legată de menținerea jocurilor între limitele proiectate pentru suprafețele aflate în contact. Plecînd de la necesitatea asigurării unor durități cît mai ridicate pentru lagărele cu contact teoretic punctiform din construcția de aparate, s-au executat tratamente termice superficiale locale utilizînd radiații laser emise în impulsuri.

Experimentările au fost realizate pe instalații laser avînd mediu activ solid (sticlă dopată cu neodim) cu emisie în impulsuri. S-au selectat oțelurile utilizate în construcția lagărelor de mecanică fină ale căror proprietăți și mod de comportare la procesele de încălzire și răcire rapidă sînt bine cunoscute din metalurgia clasică, astfel că s-a putut face o similitudine cu procesele ce au loc la încălzirea cu laser.

În cele ce urmează sînt prezentate rezultatele experimentărilor realizate pe epruvete din OSC-7, care în prealabil au fost pregătite corespunzător din punct de vedere al stării suprafețelor. S-au ales din cele 60 de probe care au fost făcute pe OSC-7, numai cele pentru care, suprafața tratată apare fără urme de vaporizare — ardere sau alte defecte ale materialului și la care s-au realizat creșteri semnificative ale durității zonelor supuse tratamentului. A rezultat că la stabilirea corectă a parametrilor reglabili ai radiației laser (mărimea densității puterii radiației q_i și durata impulsurilor τ_i), trebuie ținut seama și de corelarea corespunzătoare a acestor parametri în raport cu proprietățile fizico-chimice ale materialului de prelucrat, starea suprafeței tratate și focalizarea radiațiilor. S-a constatat că poziționarea suprafeței de prelucrat trebuie făcută sub planul focal (fig. 1), defocalizarea pozitivă, întrucît aceasta influențează mărimea zonei tratate și adîncimea de penetrare a radiațiilor. Pentru a nu se produce schimbări de fază în structura materialelor în zonele tratate (să nu se ajungă la stadiul de topire sau vaporizare), se impun restricții cu pri-

* Prof. dr. doc. ing.; Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică fină

vire la mărimea densității q_t a puterii radiației care se poate calcula cu relația :

$$q_t = \frac{0{,}885 \cdot T_m \cdot \lambda}{\sqrt{d \cdot \tau_i}} \quad [\mathrm{W/cm^2}]$$

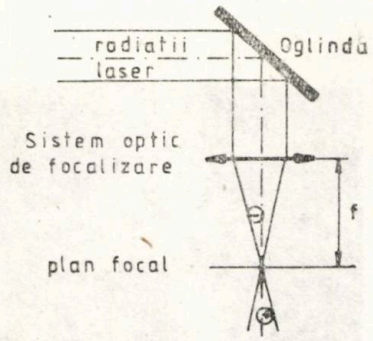


Fig. 1

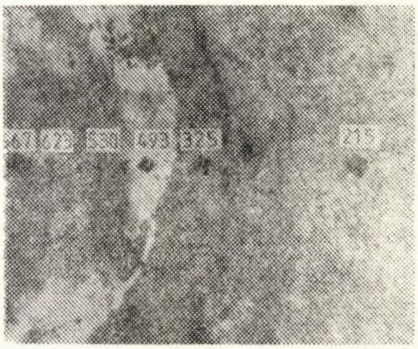


Fig. 2

unde : λ — lungimea de undă a radiației ($\lambda = 1{,}06\mu m$) ; d — difuzitatea termică a materialului ($d_{oțel} = 0{,}15$ cm²/s) ; T_m — temperatura de încălzire a suprafeței materialului supus tratamentului (care trebuie să rămînă inferioară temperaturii de topire a acestuia $T_m \simeq 0{,}75\ T_{topire}$).

S-a lucrat cu densități ale puterii radiațiilor de $(1{,}5 \div 9{,}5) \cdot 10^3$ W/cm², corelate cu durate ale impulsurilor laser de $\tau_i = (1 \div 8{,}5) \cdot 10^{-3}$ secunde. Pentru determinarea durității (Vickers) zonelor tratate s-a utilizat un microdurimetru, iar pentru investigarea metalografică a structurilor obținute, comparativ cu materialul de bază s-a folosit microscopul metalografic.

Microduritatea Vickers H_v este dată de relația :

$$H_v = \frac{1854\ f}{(n_d 0{,}285)^2} ,$$

unde : f — forța de apăsare (40 gf) ; n_d — numărul diviziunilor citite pe aparat.

În figura 2 se observă profilul circular al zonei tratate cu laser și punctele marcate în care s-a măsurat creșterea durității utilizîndu-se următoarele condiții de reglaj : densitatea de putere $q_t = 9{,}5 \cdot 10^3 \mathrm{W/cm^2}$; durata impulsului $\tau_i = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ sec ; defocalizarea : + 4 mm.

Din cauza distribuției gaussiene a intensității radiației laser duritatea realizată în urma tratamentului scade de la valoarea de 667 H_v în centrul petei, la 325 H_v, la marginea zonei tratate. Evoluția durității respectă variația de tip gaussian fig. 3. S-au obținut creșteri de peste trei ori a durității materialului în centrul zonei tratate comparativ cu duritatea materialului piesei, în urma modificărilor structurale ce au avut loc datorită încălzirii. Aceasta rezultă și din structura metalografică prezentată

în fig. 4. Se observă perlita în materialul de bază și apariția troostitei de călire în porțiunea tratată, structură metalografică tipică pentru OSC (cînd este supus unei încălziri foarte rapide urmată de o răcire într-un timp scurt, condiții realizate în cazul tratamentului termic cu laser). Răcirea efectuîndu-se într-un timp foarte scurt, datorită absorbției de căldură în masa piesei, nu se pot forma segregații, radiația laser avînd

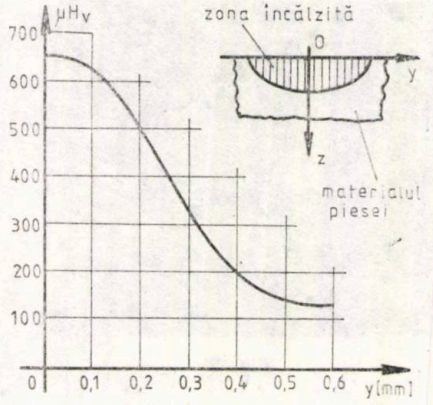


Fig. 3

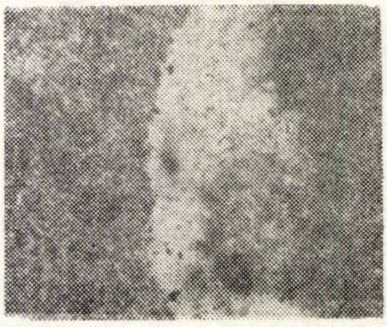


Fig. 4

rolul unei surse intense de căldură dar controlabilă ca temperatură și timp de acțiune.

În figura 5 este prezentată o altă probă de OSC — 7, care a fost supusă acțiunii radiației laser în următoarele condiții: densitatea de putere: $q_i = 3{,}5 \cdot 10^3 \mathrm{W/cm^2}$; defocalizare: + 4mm; durata impulsului: $\tau_i = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$s.

Durităților măsurate în punctele marcate au valorile: în centrul zonei, 517 H_v; în margine, 380 H_v; în materialul netratat, 186 H_v. Se

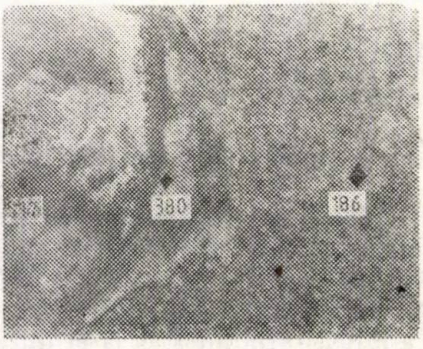


Fig. 5

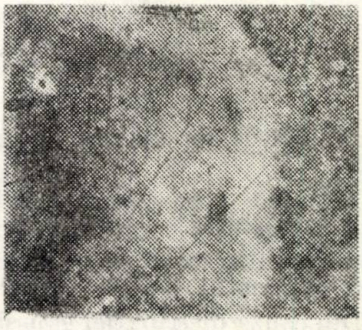


Fig. 6

confirmă creșterea durității materialului tratat. Aceasta se observă și din figura 6 (mărire 200 : 1) care pune în evidență formarea troostitei.

Experimentări efectuate pe alte materiale metalice (OSC 10, OLC 45 ș.a.) au condus la rezultate la fel de spectaculoase în ce privește ridicarea

durității locale astfel că tratamentul termic cu radiații laser deschide un cîmp foarte larg de aplicații în domeniul mecanicii fine, unde, pentru lagăre cu contact teoretic punctiform, nu există practic alte procedee de mărire a durității materialului.

BIBLIOGRAFIE

1. *O'Shea, R. Callen*, Introductions aux lasers et à leurs applications. EYROLLES — Paris, 1980
2. *J. Steffen*, Rev. Feinwerktechnik-Messtechnik — 88 — I — 1980
3. *T. Demian, A. Pascu*, Lagăre și ghidaje pentru aparate, Editura Academiei, București, 1980.
4. *Gh. Diaconescu, O. Donțu*, Unele considerații privind utilizarea laserului la operații de durificare locală pentru unele sortimente de oțeluri, COMEFIN — 1 Volum — Institutul Politehnic București, 1982
5. *P. R. Strutt*, Steat treatment of laser melted M2 tool steel. American Institute of Physics — Conference Proceedings New-York 1979.
6. *G. Christodoulou*, An Examination of Rapid Solidification Structures Produced in Special Steel by Laser Surface Treatment — In — Congress — LASER — 1981, Springer — Verlag 1982 — Berlin — New-York.

Uber eine lokale termische Bearbeitung mit Laser

In der Beitrag werden die wichtigsten Aspekte einer fur Kleinen Flachen geignete termische Bearbeitung vergestellt. Die laser-impulsen wirken an Kleinen werkstucken fur Feinmeckanik die wid aus stahl gefertigt.

C.Z.: 621. 43 : 662.748

CONTRIBUȚII LA STUDIUL COMPORTĂRII MAȘINILOR TERMICE CU CICLU REGENERATIV DE TIP STIRLING UTILIZÎND CA AGENT DE LUCRU UN AMESTEC BINAR BIFAZIC

GH. POPESCU, AL. ARHIP, AL. DĂNESCU, S. PETRESCU, V. RADCENCO *

În funcție de sensul de parcurgere al ciclului și de efectul util urmărit mașinile Stirling pot fi cu ciclu direct — motoare cu ardere externă, sau cu ciclu inversat — instalații frigorifice și pompe termice. Aceste mașini folosesc ca agent termic de lucru fie un gaz omogen, fie un agent binar bifazic. Experimental s-a demonstrat că se pot obține modificări importante ale efectului util al mașinii dacă agentul termic de lucru este format din două componente, dintre care, în timpul efectuării ciclului, unul este permanent în stare gazoasă, iar al doilea își schimbă starea de agregare prin condensare și vaporizare la trecerea lui alternativă din spațiul cald în spațiul rece și respectiv invers. Un astfel de agent termic de lucru se poate obține fie prin injecție de apă fie prin adăugarea unui component chimic reactiv, care condensează și respectiv disociază în substanțe în stare gazoasă, în funcție de nivelul de temperatură la care se află. În acest studiu se dezvoltă calculul specific pentru fiecare din cele trei tipuri de mașini termice ce pot lucra după un ciclu Stirling, iar în final rezultă că prezența în agentul termic de lucru a unui component bifazic oferă avantaje pentru motorul și instalația frigorifică cu gaze și dezavantaje pentru pompa termică cu gaze.

1. Introducere

Mașina termică cu ciclu Stirling este mașina ce obține un anumit efect util (pentru ciclul direct — efect mecanic, iar pentru ciclul inversat efect termic), cu ajutorul unui ciclu termodinamic închis, de tip regenerativ, în care evoluează o cantitate constantă de agent termic de lucru, ce este comprimat și destins la temperaturi diferite menținute constante.

În mod normal, ca agent termic de lucru se folosește un agent omogen ce se află în tot timpul efectuării ciclului în stare gazoasă; uneori este folosit aerul, dar hidrogenul și heliul sînt preferate datorită proprietăților termodinamice mai bune.

În ultimul timp se folosesc ca agenți termici de lucru și agenți binari bifazici, la care, în timpul efectuării ciclului, unul din componenți este permanent în stare gazoasă, iar al doilea este bifazic, schimbîndu-și starea de agregare prin condensare și vaporizare în funcție de nivelul de temperatură la care se află. Astfel componentul bifazic se vaporizează în spațiul cald al mașinii, rezultînd vapori supraîncălziți iar în spațiul rece al mașinii

* As. ing; As. ing.; Prof. dr. ing.; Conf. dr. ing.; Prof. dr. ing. catedra Termotehnică

condensează determinînd micșorarea substanței de lucru în stare gazoasă de aici. Un astfel de agent de lucru poate fi considerat aerul real, cu o anumită umiditate, (în medie 10 g vapori de apă/1 kg de aer uscat).

În urma cercetărilor efectuate, asupra influențelor importante determinate de prezența în cantitate mare a componentului bifazic, astfel de agenți termici au fost obținuți intenționat fie prin injecție de apă fie prin adăugarea unor componenți chimic reactivi, (ce condensează și disociază în substanțe în stare gazoasă în funcție de nivelul de temperatură la care se află de exemplu tetraoxidul de azot N_2O_4), în componentul de bază ce se află permanent în stare gazoasă.

Prezentul studiu este rezultatul generalizării, pentru toate tipurile de mașini cu ciclu Stirling, calculelor prezentate de profesorul canadian G. Walker pentru motoare Stirling cu agent termic binar bifazic [3], [4] și are la bază ciclul Stirling ideal și ciclul Schmidt ideal [1], [4].

2. Ciclul Stirling

Ciclul Stirling ideal este o succesiune de transformări de stare teoretice, format din două izoterme și două izocore, după cum este prezentat, în fig. 1 și a fost patentat pentru un motor cu ardere externă în 1816, de scoțianul Robert Stirling.

În funcție de nivelul temperaturilor la care au loc cele două procese izoterme și funcție de efectul util urmărit se pot considera următoarele tipuri de cicluri Stirling ideale (fig. 1) :

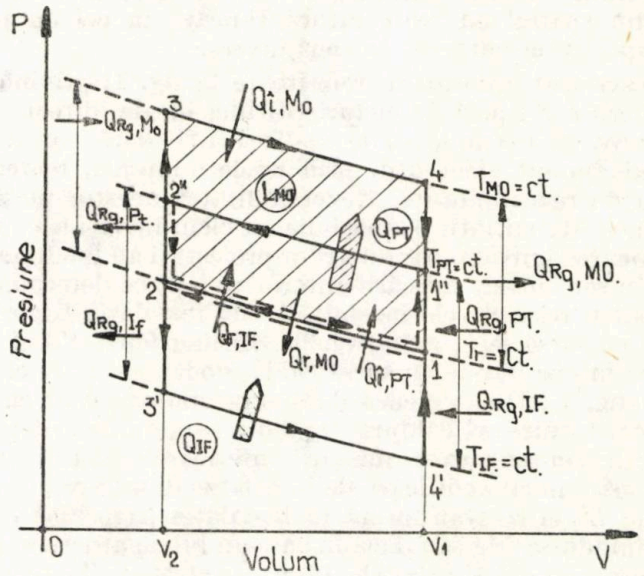


Fig. 1. — Ciclurile Stirling ideale reprezentate în coordonate p-V

a) dacă se parcurge ciclul 1234, în sens direct, se va obține ca efect util lucrul mecanic L_{MO}, ceea ce corespunde unui motor termic cu gaz, în acest caz se furnizează, agentului termic în timpul destinderii la tem-

peratura constantă T_{MO}, cantitatea de căldură Q_{MO} (rezultată de exemplu prin ardere externă) şi se extrage de la agentul termic prin răcire, în timpul comprimării la temperatura mediului de răcire T_r (considerată constantă), cantitatea de căldură $Q_{r,MO}$;

b) dacă se parcurge ciclul 123'4', în sens inversat, se va obţine ca efect util scăderea temperaturii mediului răcit ce este în contact cu spaţiul de lucru al maşinii unde are loc destinderea agentului termic, ceea ce corespunde unei instalaţii frigorifice cu gaz; în acest caz, prin antrenarea arborelui maşinii, se consumă un lucru mecanic L'_T şi prin extragerea căldurii $Q_{r,IF}$ de la agentul termic în timpul comprimării la temperatura T_r a mediului de răcire (considerată constantă), în timpul procesului de destindere agentul termic va prelua căldura Q_{IF} de la mediul răcit;

c) dacă se parcurge ciclul 1''2''21, în sens inversat, se va obţine ca efect util creşterea temperaturii mediului încălzit ce este în contact cu cu spaţiul de lucru al maşinii unde are loc comprimarea agentului termic, ceea ce corespunde unei pompe termice cu gaz, în acest caz, prin antrenarea arborelui maşinii se consumă lucrul mecanic L''_T şi prin preluarea căldurii $Q_{i,PT}$, în timpul destinderii la temperatura T_r (considerată constantă) a sursei de căldură de temperatură scăzută, în timpul procesului de comprimare agentul termic va ceda căldura Q_{PT} mediului încălzit.

În fig. 1 sînt prezentate haşurat efectele utile ale celor trei cicluri respectiv L_{MO}, Q_{IF} şi Q_{PT} şi de asemenea sînt puse în evidenţă cantităţile de căldură transferate prin procesul regenerativ perfect $Q_{Re,IF}$, $Q_{Re,MO}$ şi $Q_{Re\,PT}$, călduri pe care agentul termic le preia alternativ, în timpul curgerii, la volume diferite considerate constante, printr-un schimbător de căldură, din spaţiul cu temperatură ridicată în cel cu temperatură scăzută şi respectiv la curgerea în sens invers.

Din prezentarea anterioară, referitoare la fig. 1, privind modul de realizare a diferitelor tipuri de cicluri Stirling ideale, direct sau inversat se poate observa că maşinile ce le realizează, o dată construite pentru obţinerea unui anumit efect util, prin unele adaptări, teoretic prezintă un mare grad de reversibilitate. Reversibilitatea acestor maşini s-a constatat experimental mai întîi pe maşinile cu ciclu inversat, care, la oprire, după o funcţionare la nivelul parametrilor proiectaţi au tendinţa de autoantrenare (însă în sens invers mişcării anterioare fapt ce determină o serie de neajunsuri pentru respectivele maşini). Astfel instalaţia frigorifică devine motor termic cu sursă rece, avînd ciclul Stirling ideal 4'3'21, iar pompa termică devine motor termic cu sursă caldă moderată şi are ciclul Stirling ideal 122''1'' (fig. 1). De asemenea dacă unui motor termic cu ciclul Stirling nu i se mai furnizează căldura Q_{MO} din camera de ardere şi arborele lui este antrenat (în sens invers mişcării anterioare ceea ce reclamă pentru o bună funcţionare mici modificări ale instalaţiei de ungere), consumîndu-se lucrul mecanic L'_T el se transformă în instalaţie frigorifică — în camera de ardere obţinîndu-se frig sau dacă în camera lui de ardere se află un fluid cu temeratură constantă şi arborele lui este antrenat (în aceleaşi condiţii ca în situaţia precedentă), consumînd lucrul mecanic L''_T, el se transformă în pompă termică — crescînd temperatura apei din circuitul de răcire al vechiului motor. Faţă de aceste posibilităţi teoretice, rezultatele experimentale, referitoare la reversibilitatea maşinilor termice cu ciclu Stirling, arată că aceasta este posibilă, însă cu eforturi — materiale şi manoperă —

substanțiale, obținîndu-se efecte utile mult diminuate față de perfo r manțele mașinii inițiale.

În figura 2 este prezentată schema fundamentală a mașinii cu două pistoane P_C și P_D, ce poate realiza ciclurile Stirling ideale izoterme. Ea este formată din două spații, unul de comprimare V_c și celălalt de destindere V_D, în care agentul termic este menținut la temperaturile diferite

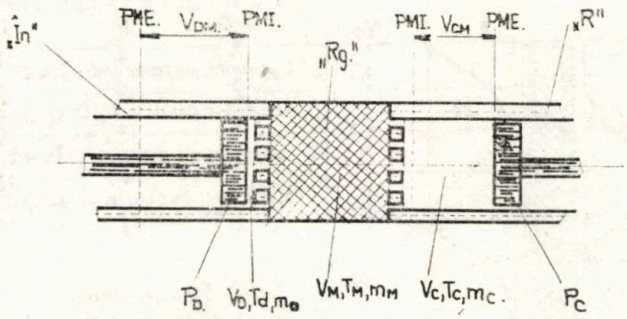


Fig. 2. — Schema fundamentală a mașinii, c două pistoane ce realizează ciclurile Stirling ideale izoterme

T_c și T_D, păstrate constante, spațiii legate între ele prin intermediul unui schimbător de căldură de tip regenerativ numit regenerator *Re*. Volumul traseului de legătură între aceste două spații este constant și este numit spațiul mort V_M. Pentru ca în spațiile în care s emișcă pistoanele P_C și P_D temperatura agentului termic de lucru să rămînă constantă, spațiul de comprimare se răcește prin intermediul unui schimbător de căldură numit răcitor, *R*, iar spațiul de destindere se încălzește prin intermediul unui schimbător de căldură numit încălzitor, *In*.

Dacă se urmărește mișcarea pistoanelor, și se pune în evidență variația volumelor instantanee din cele două spații, pentru realizarea ciclului Stirling ideal, se obține o variație ca cea reprezentată în fig. 3, în coordonate volum V_c, V_D — timp, t (α, unghiul de rotație al manivelei mecanismului pistonului P_D). Astfel la un motor ciclul 1234 fig. 1 pentru realizarea comprimării izoterme 1—2, pistonul P_D trebuie să rămînă fix în poziția *P.M.I.* în timp ce pistonul P_c se deplasează din *P.M.E.* spre *P.M.I.*, proces ce se realizează în intervalul de timp de la t_1 la t_2; pentru realizarea încălzirii izocore 2—3 (V_2 = ct.) cele două pistoane trebuie să se deplaseze simultan după o aceeași lege de mișcare, în același sens, transferînd agentul termic din spațiul de comprimare în spațiul de destindere, trecîndu-l prin regenerator (agentul termic în timpul acestui proces de curgere de la t_2 la t_3, se încălzește de la masa regeneratorului rămasă caldă de la transferul anterior), pe care îl răcește; pentru realizarea destinderii izoterme 3—4, pistonul P_C trebuie să rămînă fix în poziția *P.M.I.*, în timp ce pistonul P_D se deplasează pînă în P.M.E., proces ce se realizează în timpul de la t_3 la t_4; pentru realizarea răcirii izocore 4—1 (V_1 = ct.), cele două pistoane trebuie să se deplaseze simultan după aceeași lege de mișcare, în același sens, transferînd agentul termic din spațiul de destindere în spațiul de comprimare, trecîndu-l prin regenerator (agentul termic în timpul

acestui proces de curgere de la t_4 la t_5, se răcește cedînd căldură masei regeneratorului, rămasă rece de la transferul anterior), pe care îl încălzește și astfel în continuare ciclul se poate relua.

În tabelul T.1 sînt prezentate căldurile schimbate de agentul termic de lucru al mașinii cu ciclu Stirling ideal (Fig. 1), în timpul efectuării

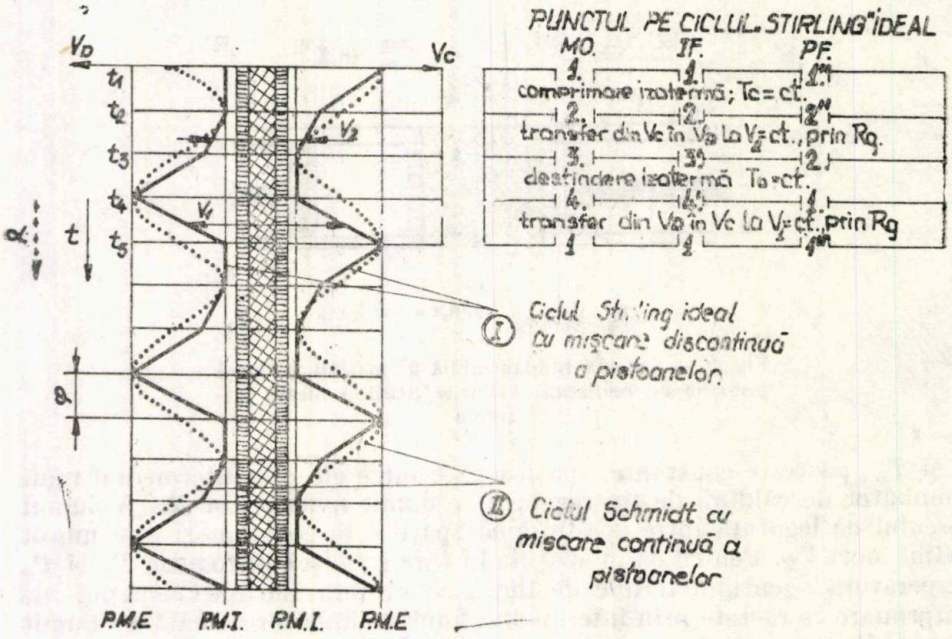


Fig. 3. — Variația în timp a volumelor V_c și V_D în mașina Stirling cu două pistoane ce realizează ciclurile Stirling ideale și aproximarea acestei variații prin mișcarea continuă a pistoanelor (ciclul Schmidt)

Tabelul 1

Căldurile schimbate de agentul termic de lucru al mașinii cu ciclu Stirling ideal în timpul efectuării ciclului

Intervalul de timp	Procesul efectuat de agentul termic de lucru	Căldura schimbată de agent cu exterioru[1]		
		Motor $T_D > T_c \equiv T_r$	Inst. Frigorifică $T_D < T_c \equiv T_r$	Pompa termică $T_D \equiv T_r < T_c$
$t_1 - t_2$	comprimare izotermă T_c = ct.	$-Q_{r,MO}$	$-Q_{r,IF}$	$-Q_{PT}$
$t_2 - t_3$	transfer din V_c în V_D, prin Rg V_2 = ct	$+Q_{Rg,MO}$	$Q-_{Rg,IF}$	$-Q_{Rg,PT.}$
$t_3 - t_4$	destindere izotermă T_D = ct.	$+Q_{I,MO.}$	$+Q_{IF.}$	$+Q_{I,PT.}$
$t_1 - t_5$	transfer din V_D în V_c, prin Rg V_1 = ct.	$-Q_{Rg,MO.}$	$+Q_{Rg,IF.}$	$+Q_{Rg,PT.}$

ciclului într-o mașină cu două pistoane (fig. 2), pentru diferitele efecte utile ce se pot obține (se consideră căldura cedată de agent negativă iar cea primitivă de agent pozitivă.)

Datorită modului discontinuu de realizare a mișcări pistoanelor mașinii, prezentat cu linie continuă în fig. 3, ciclul Stirling ideal este foarte departe de posibilitățile practice de realizare a unei mașini reale.

3. Ciclul Schmidt

O analiză teoretică a mașinilor cu ciclu Stirling, întrucîtva mai realistă decît ciclul Stirling ideal, a fost dezvoltată și publicată în 1871 de profesorul german G. Schmidt [1]. În această analiză se ține seama de mișcarea continuă a pistoanelor ce generează volumele instantanee de comprimare și destindere precum și de existența spațiului mort al conductelor de legătură și al regeneratorului.

Totuși analiza Schmidt prezintă un caracter ideal datorită ipotezelor de genul : temperaturile agentului termic de lucru în spațiul de destindere T_D și de comprimare T_c sînt considerate constante; legea de variație a volumelor instantanee este impusă ca fiind sinusoidală — (mișcare continuă însă arbitrară neținînd seama de cinematica reală a mecanismelor folosite), iar pentru a realiza variația volumelor de la ciclul Stirling ideal se impune existența unui unghi de defazaj φ între legea de variație a volumului instantaneu generat în spațiul de comprimare V_c și legea de variație a volumului instantaneu generat în spațiul de destindere V_D; se neglijează pierderile de presiune la deplasarea agentului de lucru în spațiul mașinii, presiunea instantanee considerîndu-se aceeași în tot spațiul mașinii; se consideră agentul termic de lucru ca fiind un gaz perfect și omogen.

În fig. 3 este prezentat modul în care variația continuă a volumelor instantanee, propusă de Schmidt, reușește să aproximeze variația volumelor necesară realizării ciclului Stirling din mașina cu mișcare discontinuă a pistoanelor. Avînd la bază aceste idealizări Schmidt a realizat un model matematic bine pus la punct ce permite determinarea expresiilor analitice ale cantității (masei) instantanee de agent termic dintr-un anumit spațiu al mașinii, ale presiunii instantanee din mașină și ale cantităților de căldură schimbate de agent într-un ciclu.

În fig. 4 este reprezentat în coordonate $p-V$ ciclul Schmidt ideal al mașinilor termice cu ciclu regenerativ de tip Stirling. În această figură datorită modului continuu de variație a volumelor instantanee generate și a presiunii instantanee din mașină se obțin cicluri fără puncte de discontinuitate, în care nu se mai află transformări izoterme și izocore, asemănătoare cu diagramele indicate obținute experimental.

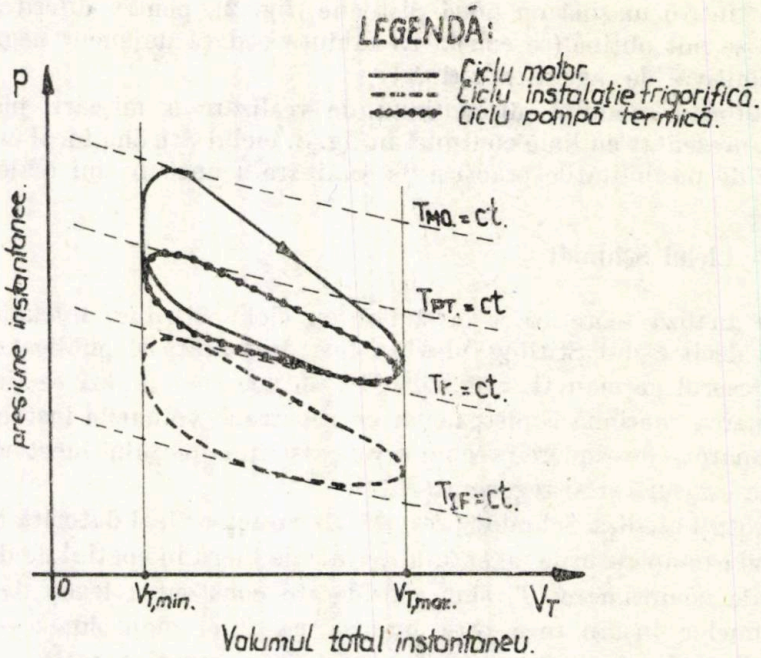


Fig. 4. — Ciclurile Schmidt ideale reprezentate în coordonate p-V.

Ciclul Schmidt, cu toate idealizările lui, faţă de situaţia reală a condiţiilor de lucru din maşinile actuale, rămîne un instrument interesant de folosit în munca de cercetare teoretică permiţînd, cu o suficientă precizie, determinarea direcţiilor de perfecţionare a maşinilor cu ciclu regenerativ de tip Stirling.

4. Ciclul regenerativ de tip Stirling cu agent termic de lucru binar bifazic

În prezentul studiu se realizează o analiză teoretică generalizată pentru toate maşinile termice cu ciclu regenerativ de tip Stirling, (motoare cu ardere externă cu gaz, instalaţii frigorifice şi pompe termice cu gaz) cu agent de lucru binar bifazic.

4.1. *Ipoteze*

În această analiză se porneşte de la teoria ciclului Schmidt folosindu-se aceleaşi ipoteze şi notaţii (prezentate în anexă), faţă de care se introduc anumite modificări [2].

Astfel agentul de lucru este binar, considerat ca fiind format din doi componenţi „a" şi „v", dintre care unul bifazic („v") îşi schimbă starea de agregare în timpul efectuării ciclului în funcţie de temperatura de lucru. Componentul de bază „a" este permanent în stare gazoasă şi se comportă ca un gaz perfect. Componentul „v" se află în stare lichidă în

spațiul cu temperatură joasă, iar în spațiul cu temperatură ridicată se află în stare de vapori supraîncălziți (cînd se folosește apă) și respectiv gazoasă (cînd se folosește component chimic reactiv). Deci componentul „v" va fi, pentru ciclul direct ($T_D > T_c$), lichid în spațiul de comprimare și gaz perfect în spațiul de destindere, iar pentru ciclul inversat ($T_D < T_c$), gaz perfect în spațiul de comprimare și lichid în spațiul de destindere.

O altă modificare față de metoda Schmidt, care presupune că temperatura agentului termic de lucru în regenerator are o variație liniară, este introducerea următoarei ipoteze simplificatoare: spațiul mort al regeneratorului este împărțit în două volume, unul „$V''_{M.T_D}$ menținut la temperatura spațiului de destindere T_D, celălalt „$V_{M.T_c}$" menținut la temperatura spațiului de comprimare T_c, iar masa totală de agent termic de lucru din regenerator m_M se împarte în mod egal între cele două spații moarte astfel definite $m_{M.T_D}$ și $m_{M;T_c}$. La suprafața ce separă în mod imaginar cele două spații moarte se presupune o variație bruscă (treaptă) de temperatură, însoțită de schimbarea de fază a componentului „v". Se observă că, pentru realizarea condiției ca masele de agent termic aflate în cele două volume moarte să fie egale, în timpul transferului (deplasări) alternativ al agentului termic prin regenerator este necesar ca suprafața imaginară, ce desparte cele două volume moarte, să se deplaseze continuu de la o extremă la cealaltă a regeneratorului.

În fig. 5 este reprezentată legea de variație a temperaturii agentului termic binar bifazic în conformitate cu noua ipoteză comparativ cu variația temperaturii agentului termic omogen conform ipotezei ciclului Schmidt. Astfel în diagramele (a) și (b) sînt indicate prin w_1 și w_2 sensurile de deplasare ale suprafeței imaginare de separație, a celor două volume moarte la trecerea agentului termic din spațiul de destindere, în spațiul de comprimare și respectiv la trecerea agentului în sens invers, pentru mașina cu ciclu direct (a) și pentru mașina cu ciclu inversat (b).

Presiunea totală instantanee a agentului termic binar bifazic se va calcula în conformitate cu legea lui Dalton pentru amestecuri de gaze perfecte și va fi aceeași în tot spațiul mașinii:

$$p = p_{a,D} + p_{v,D} = p_{a.c} + p_{v,c}$$

Întrucît în spațiul cu temperatură joasă componentul „v" se află în stare lichidă, presiunea lui parțială va fi nulă și deci pentru ciclul direct $p_{v.c} = 0$, iar pentru ciclul inversat $p_{v,D} = 0$. Și expresia anterioară devine:

pentru ciclul direct $p_d = p_{a,D} + p_{v,D} = p_{a,c}$ iar

pentru ciclul inversat $p_i = p_{a,D} = p_{a,c} + p_{v,c}$,

În studiul ciclului cu agent termic binar bifazic se presupune că raportul dintre cantitatea de gaz perfect, din componentul bifazic, existența la un moment dat în mașină și cantitatea componentului de bază considerat permanent un gaz perfect (notat cu β, numit în literatura de specialitate [6] umiditate absolută) este constant [2]. Deci prin ipoteză

$\beta = m_v/m_a = ct$. Folosind ecuația de stare a gazelor perfecte obținem în funcție de presiunile și volumele parțiale ale componenților :

$$\beta \cdot \psi = \frac{p_v \cdot V_v}{p_a \cdot V_a} = ct$$

unde : p_a, p_v — presiuni parțiale ; V_a, V_v — volume parțiale

$\psi = \frac{M_a}{M_v}$ — raportul maselor molare

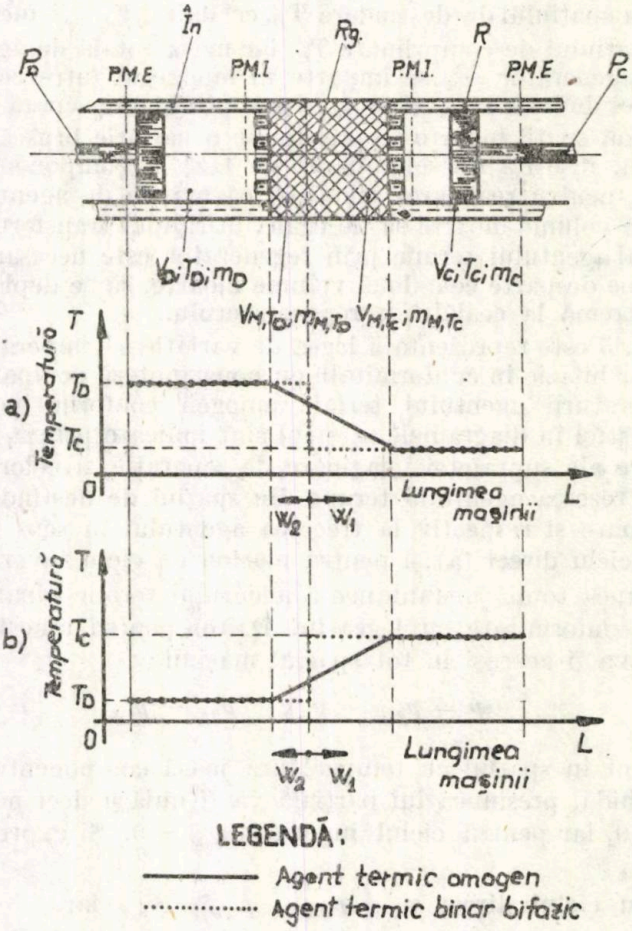


Fig. 5. — Variația temperaturii : agentului termic în mașina cu ciclu regenerativ tip Stirling.

Ipoteza că umiditatea absolută, a agentului termic binar bifazic, este constantă, la prima vedere se pare că nu este posibilă, căci în timpul funcționării mașinii componentul bifazic migrează din spațiul cald în spațiul rece unde condensează și se acumulează aici în stare lichidă. Acest

neajuns se poate practic remedia prin recircularea condensului din spațiul rece în spațiul cald fie cu o pompă, fie prin efect gravific, plasînd spațiul rece deasupra celui cald.

Această ultimă ipoteză este foarte apropiată de condițiile de lucru ale mașinilor cu turație mare, unde aproape întreaga cantitate de component bifazic se află în stare gazoasă; la mașinile cu turație mică aproape întreaga cantitate de component bifazic se află în stare lichidă și deci $\beta = 0$, ceea ce corespunde ipotezelor ciclului Schmidt cu agent termic omogen.

4.2. *Rezumatul analizei*

Etapele de calcul ale prezentei analize, sînt similare analizei ciclului Schmidt, prezentată în detaliu în lucrările [1] și [4] și reies din relațiile ce urmează, unde s-au folosit notațiile prezentate în anexă.

4.2.1. *Volume*

Volumul instantaneu generat în spațiul de destindere:

$$V_D = \frac{1}{2} V_{DM}(1 + \cos\alpha); \tag{1}$$

Volumul instantaneu general în spațiul de comprimare:

$$V_c = \frac{1}{2} V_{CM}(1 + \cos(\alpha - \varphi)); \tag{2}$$

Volumul instantaneu total în cele două spații:

$$V_T = \frac{1}{2} V_{DM}(1 + K + \cos\alpha + K\cos(\alpha - \varphi)); \tag{3}$$

Volumul maxim total general în cele două spații:

$$V_{TM} = (1 + K)\, V_{DM}; \tag{4}$$

Volumul mort al regeneratorului:

$$V_M = X\, V_{DM} = V_{M,T_D} + V_{M,Tc}; \tag{5}$$

4.2.2. *Presiuni*

Dacă se calculează din ecuația de stare a gazelor perfecte masa instantanee în fiecare spațiu al mașinii, în funcție de volumul instantaneu și agentul termic de lucru ce se află aici se obține:

a) pentru ciclul direct ($T_D > T_C$):

— masa instantanee din spațiul de destindere:

$$m_D^d = \frac{1}{2} \cdot (1 + \beta) \cdot \frac{p \cdot V_{DM}}{R_a \cdot T_D} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \beta \cdot \psi}; \qquad (6, a)$$

— masa instantanee din spațiul de comprimare:

$$m_c^d = \frac{1}{2}(1 + \beta) K \frac{p \cdot V_{DM}}{R_a \cdot T_c}(1 + \cos(\alpha - \varphi)); \qquad (7, a)$$

— masa instantanee din spațiul mort:

$$m_M^d = (1 + \beta) \cdot \frac{p \cdot V_{DM}}{R_a \cdot T_c} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \Omega}{1 + \Omega}; \qquad (8, a)$$

Unde s-a notat: $\Omega = \dfrac{\tau}{1 + \beta \cdot \psi} = \text{ct.}$

b) pentru ciclul inversat ($T_D < T_C$);

— masa instantanee din spațiul de destindere:

$$m_d^i = \frac{1}{2}(1 + \beta) \frac{p \cdot V_{DM}}{R_a \cdot T_D}(1 + \cos \alpha); \qquad (6, b)$$

— masa instantanee din spațiul de comprimare:

$$m_c^i = \frac{1}{2}(1 + \beta) K \cdot \frac{p \cdot V_{DM}}{R_a T_c} \cdot \frac{1 + \cos(\alpha - \varphi)}{1 + \beta \cdot \psi}; \qquad (7, b)$$

— masa instantanee din spațiul mort:

$$m_M^i = (1 + \beta) \cdot \tau \cdot \frac{p \cdot V_{DM}}{R_a \cdot T_c} \cdot \frac{2 \cdot x\Omega}{1 + \Omega}; \qquad (8, b)$$

Dacă se ține cont de faptul că suma maselor instantanee (atît pentru ciclul direct cît și pentru cel inversat) este egală cu masa totală (care este constantă), se obține:

$$m_T^x = m_D^x + m_C^x + m_M^x = \text{ct.},$$

unde indicele „x" — poate fi pentru ciclul direct „d", iar pentru ciclul inversat „i".

Iar dacă în formula de calcul a masei totale se înlocuiesc expresiile maselor instantanee din relațiile 6, 7, 8 și dacă expresia obținută se împarte cu constanta notată:

$$\overline{K}_x = \frac{2 R_a T_c m_T^x}{V_{DM}(1 + \beta)},$$

și dacă se notează: a) pentru ciclul direct:

$$\tau_d = \Omega\,;\quad K_d = K\,;\quad S_d = \frac{2\cdot X\cdot\Omega}{1+\Omega} \tag{9, a}$$

b) pentru ciclul inversat

$$\tau_i = \tau\,;\quad K_i = \frac{K}{1+\beta\cdot\psi}\,;\quad S_i = \frac{2\cdot X\cdot\tau\cdot\Omega}{\tau^2+\Omega} \tag{9, b}$$

se obține o expresie de o aceeași formă cu metoda Schmidt;

$$\frac{\overline{K}_x}{p} = \tau_x(1+\cos\alpha) + K_x(1+\cos(\alpha-\varphi)) + 2\,S_x\,; \tag{10}$$

Dacă se prelucrează relația 10 și se notează similar ca în metoda Schmidt:

$$A_x = (K_x^2 + \tau_x^2 + 2K_x\cdot\tau_x\cdot\cos\varphi)^{1/2}\,;\quad B_x = \tau_x + K_x + 2S_x\,;$$

$$C_x = A_x/B_x\quad \theta_x = \operatorname{arc\,tg}\,(K_x\cdot\sin\varphi/(\tau_x + K_x\cdot\cos\varphi))$$

se obține legea de variație a presiunii instantanee similar cu metoda Schmidt:

$$p = \frac{p_{\max}(1-C_x)}{1+C_x\cdot\cos(\alpha-\theta_x)}\,;\ (10)\ \text{sau}\ p = \frac{p_{\min}(1+C_x)}{1+C_x\cdot\cos(\alpha-\theta_x)}, \tag{11}$$

Iar dacăse integrează pe durata unui ciclu ($\alpha \in 0 \div 2\pi$), obținem expresia presiunii medii în funcție de presiunile maxime și minime realizate într-un ciclu:

$$p_{\text{med}} = \sqrt{p_{\max}\cdot p_{\min}} = p_{\max}\cdot\left(\frac{1-C_x}{1+C_x}\right)^{1(2}\,; \tag{12}$$

4.2.3. *Căldura transferată în spațiul de destindere și de comprimare pe ciclu* (Q_D, Q_c)

Calculul căldurilor transferate pe un ciclu în spațiile de comprimare și destindere se realizează, ca și în metoda Schmidt, avîndu-se la bază ipoteza că temperatura masei instantanee de agent termic ce se află în aceste spații este constantă. În consecință căldura schimbată în aceste spații pe un ciclu va fi egală cu lucrul mecanic schimbat în spațiile respective pe un ciclu și deci $Q_D = L_D$ iar $Q_c = L_c$.

Lucrul mecanic schimbat de agentul termic cu exteriorul într-un ciclu se calculează cu relația: $L = \int pdV$. Dacă se ține cont de expresia presiunii instantanee din mașină și a volumului instantaneu V_D și V_c, integrînd pentru perioada unui ciclu ($\alpha \in 0 \div 2\pi$), se obține lucrul meca-

nic schimbat și respectiv cantitatea de căldură schimbată de agentul termic pe ciclu în aceste spații :

în spațiul de destindere :

$$Q_D^x = \pi \cdot p_{med} \cdot V_{DM} \cdot C_x \cdot \sin \theta_x / (1 + (1 - C_x^2)^{1/2}; \quad (13)$$

iar în spațiul de comprimare :

$$Q_c^x = \pi p_{med} \cdot K \cdot V_{DM} \cdot C_x \cdot \sin(\theta_x - \varphi)/(1 + (1 - C_x^2)^{1/2}; \quad (14)$$

Dacă se calculează raportul acestor călduri schimbate de agentul termic pe ciclu, obținem :

$$\frac{Q_c^x}{Q_D^x} = -\frac{K}{K_x} \cdot \tau_x; \quad (15)$$

4.2.4. *Lucrul mecanic total schimbat de agentul termic pe ciclu* (L_T).

Calculul lucrului mecanic total se realizează însumînd lucrurile mecanice schimbate de agentul termic în cele două spații generate, deci :

$$L_T^x = L_D^x + L_C^x = Q_D^x + Q_c^x = \left(1 + \frac{Q_c^x}{Q_D^x}\right) Q_D^x$$

Ținînd seama de relația (15) se obțin :

$$L_T^x = \left(1 - \frac{K}{K_x} \tau_x\right) Q_D^x; \quad (16)$$

4.2.5. *Puterea schimbată de mașină*

În condițiile ipotezei că mașina se află în regim de funcționare constant, se presupune că turația arborelui (n) este constantă și ținînd seama de expresia lucrului mecanic total schimbat pe un ciclu (relația 16), vom obține :

$$P_x = \left(1 - \frac{K}{Kx} x\right) Q_D^x \cdot N^n; \quad (17)$$

4.2.6. *Randament și eficiență*

— Randamentul termic (η_t) este una din mărimile termodinamice caracteristice deosebit de importante pentru mașinile cu ciclu direct (motoare) și apreciază gradul în care motorul ce funcționează după un asemenea ciclu reușește să transforme căldura primită din camera de ardere în lucru mecanic util. Deci randamentul termic pentru ciclul cu agent termic binar bifazic se va calcula astfel :

$$\eta_t^d = \frac{L_t^d}{Q_D^d} = \frac{Q_D^d + Q_c^d}{Q_D^d} = 1 + \frac{Q_c^d}{Q_D^d};$$

Ținînd cont de relația (15) și notațiile (9a), obținem:

$$\eta_t^d = 1 - \frac{\tau}{1 + \beta\psi}\ ; \tag{18}$$

— Eficiența frigorifică (ε_f) este una din mărimile termodinamice caracteristice deosebit de importante pentru mașinile cu ciclu inversat (instalații frigorifice) și apreciază măsura în care o instalație frigorifică ce funcționează cu un asemenea ciclu reușește să extragă o anumită cantitate de căldură utilă consumînd un lucru mecanic. Deci eficiența frigorifică pentru ciclul cu agent binar bifazic se va calcula astfel:

$$\varepsilon_f^i = \frac{Q_D^i}{L_T^i} = \frac{Q_D^i}{Q_D^i + Q_C^i} = \frac{1}{1 + Q_C^i/Q_D^i}\ ;$$

Ținînd cont de relația (15) și notațiile (9b), obținem:

$$\varepsilon_f^i = \frac{1 + \beta \cdot \psi}{1 + \beta \cdot \psi - \tau}\ ; \tag{19}$$

— Eficiența termică (ε_t) este una din mărimile termodinamice caracteristice deosebit de importante pentru mașinile cu ciclu inversat (pompă termică) și apreciază măsura în care o pomă termică ce funcționează după un asemenea ciclu reușește să cedeze o cantitate de căldură utilă consumînd un lucru mecanic. Deci eficiența termică pentru un ciclu cu agent binar bifazic se va calcula astfel:

$$\varepsilon_t^i = \frac{Q_c^i}{L_T^i} = \frac{Q_c^i}{Q_D^i + Q_C^i} = \frac{Q_c^i/Q_D^i}{1 + Q_c^i/Q_D^i}\ ;$$

Ținînd cont de relația (15) și notațiile (9b), obținem;

$$\varepsilon_t^i = \frac{\tau(1 + \beta \cdot \psi)}{1 - \tau(1 + \beta \cdot \psi)}\ ; \tag{20}$$

4.2.7. *Distribuția masei agentului termic binar bifazic în mașină*

Expresiile analitice ale maselor instantanee de agent termic binar bifazic în spațiile mașinii se pot obține sub o formă generalizată, atît pentru ciclul direct, cît și pentru ciclul inversat, dacă în relațiile lor anterioare (6a), (6b), (7b) și (8a), (8b), se va înlocui presiunea instantanee (din relația (20), iar dacă se va ține cont de notațiile (4), (9a) și (9b) se vor obține următoarele expresii pentru masa instantanee de agent termic din spațiul de destindere:

$$m_D^x = \frac{p_{max} \cdot V_{TM}}{R_a \cdot T_c} \cdot \frac{1 + \beta}{1 + K} \cdot \frac{\tau_x}{2} \cdot \frac{(1 + \cos\alpha)(1 - C_x)}{1 + C_x \cos(\alpha - \theta_x)}\ ; \tag{21}$$

masa instantanee de agent termic din spațiul de comprimare :

$$m_C^x = \frac{p_{max} \cdot V_{TM}}{R_a \cdot Tc} \cdot \frac{1+\beta}{1+K} \cdot \frac{K_x}{2} \cdot \frac{(1+\cos(\alpha-\varphi))(1-C_x)}{1+C_x \cdot \cos(\alpha-\theta_y)} ; \quad (22)$$

masa instantanee de agent termic din spațiul mort :

$$m_C^x = \frac{p_{max} \cdot V_{TM}}{R_a \cdot T_c} \cdot \frac{1+\beta}{1+K} \cdot S_x \cdot \frac{1-C_x}{1+C_x \cdot \cos(\alpha-\theta_x)} ; \quad (23)$$

Masa totală de agent termic binar bifazic din mașină se va calcula însumînd masele instantanee din spațiile mașinii : $m_T^x = m_D^x = m_C^x + m_M^x$, iar dacă se ține cont de formulele (21) (22) și (23) în care s-a introdus presiunea medie (rel, 12), se va obține :

$$m_T^x = \frac{p_{med} \cdot V_{TM}}{R_a Tc} \cdot \frac{1+\beta}{1+K} (1-C_x^2)^{1/2} \cdot \frac{\tau_x + S_x + K_x(1+\cos\varphi)/2}{1+C_x \cdot \cos\theta_x} ; \quad (24)$$

4.2.8. *Parametrii adimensionali ai căldurii*

Pentru a compara mașinile cu ciclu regenerativ de tip Stirling în literatura de specialitate [4] s-au introdus doi parametri adimensionali.

Unul reprezintă căldura extrasă în spațiul de destindere de unitatea de masă de agent termic ce evoluează în mașină și se calculează cu relația :

$$Q_{Mas} = \frac{Q_D}{m_T \cdot RT_c} ;$$

Creșterea acestui parametru este limită de creșterea cantității de agent termic necesar, ce determină în ultimă instanță creșterea gabaritului mașinii.

Un al doilea parametru adimensional folosit reprezintă căldura extrasă în spațiul de destindere, raportată la presiunea maximă realizată într-un ciclu al mașinii și se calculează cu relația :

$$Q_{Max} = \frac{Q_D}{p_{max} \cdot V_{TM}}$$

Creșterea acestui parametru este limitat de problemele de rezistență ce apar la presiuni prea mari.

În cazul ciclului cu agent termic binar bifazic, avîndu-se în vedere relațiile (12), (13) și (24) pentru cei doi parametri adimensionali ai căldurii se vor obține expresiile :

$$Q_{MAS}^x = \frac{Q_x^d}{m_T^x \cdot R_a \cdot T_c} = \frac{\pi \cdot C_x \cdot \sin\theta_x \cdot (1+C_x \cdot \cos\theta_x)}{(1-C_x^2)^{1/2}(1+(1-C_x^2)^{1/2}) \cdot (\tau_x + S_x + K_x(1+\cos\varphi)/2)} ; \quad (25)$$

iar

$$Q^x_{Max} = \frac{Q^x_D D}{p^x_{max} \cdot V_{TM}} = \frac{\pi \cdot (1 - C_x)^{1/2} \cdot C_x \cdot \sin \theta_x}{(1 + K)(1 + C_x)^{1/2}(1 + (1 - C_x^2)^{1/2})} \; ; \quad (26)$$

5. Concluzii

Studiul teoretic prezentat, deși are un mare grad de idealizare, prin relațiile obținute dă indicații concrete referitoare la modificările unor mărimi termodinamice ale mașinilor termice cu ciclu regenerativ tip Stirling, dacă se folosește ca agent termic de lucru, în locul agentului termic gaz omogen, un agent binar bifazic în care unul din componenți este permanent în stare gazoasă, iar al doilea component își schimbă starea de agregare prin condensare și vaporizare la trecerea lui din spațiul cald în spațiul rece al mașinii și respectiv la trecerea în sens invers.

Modelul matematic folosit în acest studiu, în afară de parametrii fundamentali ai ciclului Schmidt cu agent termic gaz omogen τ, K, X și φ mai introduce suplimentar și alți doi parametri fundamentali: β și ψ. Dacă parametrii K, X și φ sînt parametri de ordin constructiv, iar parametrul τ de ordin funcțional, noii parametri introduși iau în considerare în mod simplificat anumite aspecte ce caracterizează agentul termic de lucru constituit din două componente, dintre care unul își schimbă starea de agregare în timpul efectuării ciclului. Astfel parametrul β este un parametru de tip cantitativ, definind proporțiile dintre cei doi componenți, iar parametrul ψ este un parametru de tip calitativ, el definind proprietățile specifice celor doi componenți folosiți. Componentul de bază (permanent în stare gazoasă) poate fi un gaz ușor (hidrogen $M_a = 2$, heliu $M_a = 4$), sau un gaz greu (aer $M_a = 29$, bioxid de carbon $M_a = 44$), iar componentul bifazic poate fi un lichid ușor (apă $M_v = 18$), sau un lichid greu (freon $M_v = 100$, tetraoxid de azot $M_v = 96$).

În lucrare sînt prezentate expresiile analitice ale efectelor utile pentru toate tipurile de mașini termice cu ciclu regenerativ tip Stirling — motor cu ardere externă (L^d_T), instalație frigorifică (Q^i_D) și pompă termică (Q^i_c) — în funcție de toți acești șase parametri fundamentali.

Din studiul comparativ față de metoda ciclului Schmidt (unde $\beta = 0$) pentru mărimile termodinamice, referitoare la randament termic și eficiențe, definite prin relațiile (18), (19) și (20) se constată că: $\eta^d_{t/\beta \neq 0} > \eta^d_{t/\beta = 0}$, $|\varepsilon^i_{f/\beta \neq 0}| > |\varepsilon^i_{f/\beta = 0}|$ iar $\varepsilon^i_{t/\beta \neq 0} < \varepsilon^i_{t/\beta = 0}$. Și deci rezultă că prezența în agentul termic de lucru a unui component bifazic determină avantaje importante pentru motorul termic și instalația frigorifică cu gaz, cu ciclu Stirling, în condițiile în care greutatea, prețul de cost și cantitatea de agent termic din mașină rămîn aceleași.

De asemenea prin intermediul expresiilor analitice (25) și (26) ce definesc parametrii adimensionali ai căldurii extrase în funcție de parametrii fundamentali ai mașinilor cu ciclu Stirling, cu agent binar bifazic, studiul reprezintă teoria de bază ce permite dezvoltarea unei analize de alegere optimă a acestor parametri fundamentali, în condițiile obținerii unor efecte utile maxime atît pentru motoare termice cu ardere externă [5], cît și pentru instalațiile frigorifice cu gaze.

Rezultatele experimentale obţinute [4] sînt în concordanţă cu concluziile obţinute din acest studiu teoretic, însă datorită gradului mare de idealizare (procese izoterme, amestec omogen al agentului binar bifazic pentru ca umiditatea lui absolută să fie constantă, proces regenerativ perfect, neglijarea pierderilor gazodinamice de presiune la trecerea agentului prin maşină) rezultatele acestui model matematic rămîn doar cu valoare orientativă, ele urmînd a fi definitivare experimental.

ANEXĂ — NOTAŢII

$\tau = \frac{T_c}{T_D}$ — raportul temperaturilor din spaţiul de comprimare (V_c) şi din spaţiul de destindere (V_c);

$K = \frac{V_{CM}}{V_{DM}}$ — raportul volumelor maxime generate în cele două spaţii;

α — unghiul de fază al legii de variaţie a volumului de destindere (V_D);

φ — unghiul de defazaj al legii de variaţie a volumului V_D şi legea de variaţie a volumului V_C;

$\beta = \frac{m_v}{m_a}$ — masa de gaz din componentul bifazic existentă în maşină la un moment dat raportată la masa componentului permanent în stare gazoasă;

$R = \frac{R_M}{M}$ — constanta gazului folosit ca agent termic în maşină;

unde R_M — constanta gazelor perfecte;

M — masa molară a gazului folosit ca agent termic în maşină;

θ — unghiul de defazaj al legii de variaţie a presiunii instantanee faţă de legea de variaţie a volumului (V_D);

P.M.I. — punctul mort interior — faţă de spaţiul de lucru — al pistonului ce generează volumul;

P.M.E. — punctul mort exterior — faţă de spaţiul de lucru — al pistonului ce generează volumul;

Pentru diferitele mărimi specifice s-au notat cu indicii:

D, C, M — pentru spaţiul de destindere, comprimare şi respectiv mort;

a, v — pentru componentul de bază permanent gaz perfect şi respectiv pentru cel bifazic;

d, i, x — pentru ciclul direct, pentru ciclul inversat şi respectiv pentru ambele tipuri de cicluri;

MO, IF, PT — pentru motor, instalaţie frigorifică şi respectiv pompa termică.

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Walker*, Stirling Machines, Oxford University Press, Oxford 1973;
2. *G. Walker, B. Agbi*, „Trans. CŞME, Vol. 2, Nr. 1, 1974, pag. 1—8;
3. *G. Walker, M. N. Metally*, Journal of Engineering for Power, april 1977, pag. 284—287;
4. *G. Walker*, Stirling Engines, Clarendon Press, Oxford 1980;
5. *G. Walker, B. Agbi*, „Optimum Design Configuration of Stirling Engines With Two-Phase, Two-Component Working Fluids", ASME Paper, N0 33 — WA/DcP — 1;
6. *G. Stamatescu, M. Peculea, V. Radcenco, ş. a.*, Criogenie Tehnică, Bucureşti, E. T. 1982.

Contributions à l'etude sur le comportement des machines thermiques avec cycle régénératif de type Stirling en utilisant un agent de travail un mélange binaire-biphasique

D'apres le sens du parcours du cycle et de l'effet util suivi, les machines Stirling peuvent avoir un cycle direct, c'est à dire des moteurs à combustion externe, ou un cycle inverse, c'est à dire des installations frigorifiques et des pompes thermiques. Ces machines utilisent comme agent thermique du travail soit un gaz homogène, soit un agent binaire biphasique. On à démontré par des expériences qu'on peut obtenir des modifications importantes de l'effet util de la machine si l'agent thermique du travail est formé par deux components des quelles, pendant qu'on effectue un cycle, l'un est toujours en tat gazeux, et l'autre change son état d'agrégation par condensation et vaporisation alors qu'il passe alternativement de l'espace chaud à l'espace froid et inversement ensuite.

On peut obtenir un tel agent thermique de travail soit par l'injection d'eau soit en ajoutant un component chimique réactif qui condense et dissocie en substances en état gazeux d'après le niveau de la température qu'il à ce moment.

Le sujet de cet étude est le calcule spécifique de chacun des trois types de machines thermiques qui peuvent travailler aprés un cycle Stirling, et finalement il résulte que la présence d'un component biphasique dans l'agentthermique de travail offre des avantages pour le moteur et pour l'installation frigorifique aux gaz et des désavantages pour la pompe thermique aux gaz.

C.Z.: 531

O GENERALIZARE A TEOREMEI LUI HUYGENS ASUPRA VARIAȚIEI TENSORULUI DE INERȚIE

ȘT. STAICU*

Lucrarea stabilește o relație generalizată privind variația matricii generale de inerție cu schimbarea sistemului de referință. Scrisă cu ajutorul vectorilor duali, formula obținută furnizează relațiile matriciale de variație a momentului static cît și a tensorului de inerție, în raport cu deplasarea reperului. Prin particularizări, se regăsesc cazurile elementare de variație a momentelor de inerție.

Se consideră un sistem material format din punctele A_i avînd masele m_i. Fie $\vec{\rho}_i$ și $\vec{r}_i$ vectorii invariabili de poziție ai acestor puncte față triedrele $\Omega\xi\eta\zeta$, respectiv $Oxyz$ și

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} [a] & 0 \\ \hline 0 & [a] \end{array}\right] \tag{1}$$

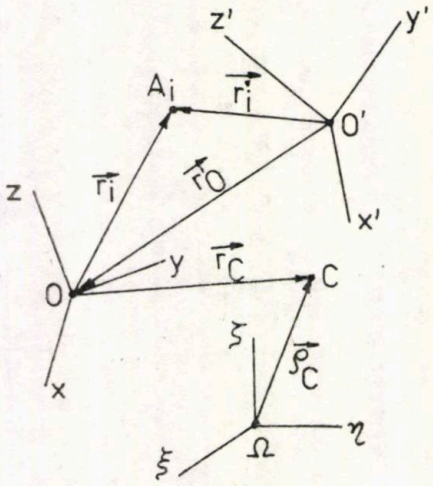


Fig. 1

matricea de trecere în al doilea reper (fig. 1).

Momentul cinetic dual al acestui sistem material, în raport cu originea Ω a triedrului cartezian fix,

$$(K_\Omega) = \left[\begin{array}{c} (h) \\ \hline (k_\Omega) \end{array}\right] \tag{2}$$

poate fi exprimat prin relația

$$(K_\Omega) = [M_\Omega]\,(V_o), \tag{3}$$

unde

$$(V_o) = \left[\begin{array}{c} (v_o) \\ \hline (\omega) \end{array}\right] \tag{4}$$

este viteza dual instantanee a sistemului în punctul său O, iar

$$[M_\Omega] = \left[\begin{array}{c|c} [m] & [m][r_C]^T \\ \hline [m][a][\rho_o][a]^T + [m][r_C] & [m][a][\rho_o][a]^T[r_C] + [J_o] \end{array}\right] \tag{5}$$

este matricea generală de inerție care conține matricea de inerție $[m]$ a masei și tensorul de inerție $[J_o]$ relativ la sistemul $Oxyz$.

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică

Să observăm că relaţia (3) poate fi scrisă şi sub următoarea formă

$$(K_\Omega) = [M_\Omega][A][\mathscr{R}_O^0][A]^T(V_C) + [M_O](V_O), \tag{6}$$

care constituie, în fond, formula de variaţie a momentului cinetic dual. În această relaţie s-a notat

$$[M] = \left[\begin{array}{c|c} [m] & 0 \\ \hline 0 & [m] \end{array}\right], \quad [\mathscr{R}_O^0] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline [\rho_O] & 0 \end{array}\right],$$

$$[R_O^0] = \left[\begin{array}{c|c} [E] & 0 \\ \hline [\rho_O] & 0 \end{array}\right]. \tag{7}$$

Ultimul termen al relaţiei (6):

$$(K_O) = [M_O](V_O),$$

reprezintă momentul cinetic dual al sistemului faţă de punctul O, exprimat în funcţie de matricea simetrică de inerţie raportată la reperul $Oxyz$

$$[M_O] = \left[\begin{array}{c|c} [m] & [m][r_C]^T \\ \hline [m][r_C] & [J_O] \end{array}\right]. \tag{9}$$

În cele ce urmează se va stabili o relaţie de variaţie a acestei matrici pătratice, în raport cu schimbarea sistemului de referinţă.

Astfel, presupunînd cunoscută starea spaţială de inerţie relativă la reperul $Oxyz$, adică matricea $[M_O]$, să determinăm expresia matricii de inerţie $[M_{O'}]$ a aceluiaşi sistem material faţă de un alt triedru $O'x'y'z'$ (fig. 1). Fie $[A^*]$ matricea de trecere din reperul $O'x'\varepsilon'z'$ în reperul $Oxyz$.

Raportîndu-ne la fig. 1., să scriem relaţiile matriciale

$$\begin{aligned} [R_i'] &= [\mathscr{R}_O'] + [A^*]^T[R_i]\,[A^*] \\ [R_C'] &= [\mathscr{R}_O'] + [A^*]^T[R_C][A^*] \\ [\mathscr{R}_i'] &= [\mathscr{R}_O'] + [A^*]^T[\mathscr{R}_i]\,[A^*] \\ [\mathscr{R}_C'] &= [\mathscr{R}_O'] + [A^*]^T[\mathscr{R}_C]\,[A^*] \end{aligned} \tag{10}$$

şi să calculăm matricea de inerţie

$$[M_{O'}] = [M][R_C'] + \sum_i [M_i][R_i'][\mathscr{R}_i']^T. \tag{11}$$

Ţinînd seama de (9), rezultă relaţia

$$[M_{O'}] = [A^*]^T[M_O]\,[A^*] + [M][\mathscr{R}_O'] + [M][\mathscr{R}_O'][\mathscr{R}_O']^T +$$
$$+ [M][\mathscr{R}_O'][A^*]^T[\mathscr{R}_C]^T[A^*] + [M][A^*]^T[R_C][A^*][\mathscr{R}_O']^T, \tag{12}$$

care reprezintă relaţia generalizată a lui Huygens.

Relația (12) poate furniza formulele de variație ale momentului static (S_O) cît și a tensorului de inerție $[J_O]$, în raport cu deplasarea sistemului de referință. Să calculăm, în acest scop, matricea $[M_{O'}]$ cu ajutorul relației (12) și să identificăm blocurile de matrici; rezultă mai întîi relațiile de variație a momentelor statice

$$[S_{O'}] = [a^*]^T[S_O][a^*] + [m][r'_O] \tag{13}$$

$$(S_{O'}) = [a^*]^T(S_O) + [m](r'_O),$$

și apoi formula de variație a tensorului de inerție

$$[J_{O'}] = [a^*]^T[J_O][a^*] + [m][r'_O][r'_O]^T + [m][r'_O][a^*]^T[r_C]^T[a^*] +$$

$$+ [m][a^*]^T[r_C][a^*][r'_O]^T. \tag{14}$$

Observații

a) Dacă axele celor două referențiale sînt paralele, matricea $[a^*]$ devine unitatea $[E]$, iar relația (14) se obține

$$[J_{O'}] = [J_O] + [m]\{[r_C]^2 - [r'_C]^2\}, \tag{15}$$

adică formula de variație a tensorului de inerție față de axe paralele.

În cazul particular cînd originea O coincide cu centrul de masă, vom face $(r_C) = 0$ și va rezulta relația matricială

$$[J_{O'}] = [J_C] + [m][r'_C][r'_C]^T. \tag{16}$$

b) Dacă originile O și O' coincid, rezultă formula de variație a tensorului de inerție în raport cu axe concurente, adică

$$[J_O] = [a^*]^T[J_O][a^*]. \tag{17}$$

c) Dacă punctul O coincide cu centrul de masă, relația generală (14) capătă forma

$$[J_{O'}] = [a^*]^T[J_C][a^*] + [m][r'_C][r'_C]^T, \tag{18}$$

în care ultimul termen reprezintă tensorul de inerție al sistemului relativ la reperul $\Omega\xi\eta\zeta$, calculat în ipoteza că masa m s-ar concentra în centrul de masă C. Dacă axele Cx, Cy și Cz devin axe principale de inerție tensorul central de inerție se va reduce la o matrice diagonală

$$[J_C] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}. \tag{19}$$

d) Pornind de la relaţia dintre matricile $[M_\Omega]$ şi $[M_O]$:

$$[M_\Omega] = [M_O] + [M][A][\mathscr{R}_O^0][A]^T + [M][A][\mathscr{R}_O^0][A]^T[\mathscr{R}_C]^T \quad (20)$$

şi de la formula (12), se poate stabili, în cazul unui rigid, o relaţie de variaţie a matricii $[M_\Omega]$cu schimbarea referenţialului ataşat rigidului respectiv :

$$[M'_\Omega] = [A^*]^T[M_\Omega][A^*] + [M][A^*]^T[A][R_C^0][A]^T[A^*][\mathscr{R}'_O]^T. \quad (21)$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Şt. Staicu*, Introducere în mecanica teoretică, Ed. Ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.
2. *D. Mangeron, N. Irimiciuc*, Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978 (vol. I), 1980 (vol. II), 1981 (vol. III).
3. *V. Vâlcovici, Şt. Bălan, R. Voinea*, Mecanica teoretică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.
4. *C. Iacob*, Mecanica teoretică, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
5. *F. M. Dimentberg*, Teoria vintov i ee prilojenia, Ed. Nauka, Moskva, 1978.
6. *G. E. Mase*, Theory and problems of continuum mechanics, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1970.
7. *M. R. Spiegel*, Theoretical Mechanics, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1970
8. *J. Wittenburg*, Dynamics of systems of rigid bodies, Stuttgart, 1977, Mir, Moskva, 1980

Généralisation du théoréme de Huygens concernant la variation du tenseur d'inertie

L'article établit une relation généralisée concernant la variation de la matrice générale d'inertie par rapport au changement du référentiel. En l'écrivant à l'aide des vecteurs duels, la formule obtenue fournit également les relations matricielles de variation du moment statique et du tenseur d'inertie, en fonction du déplacement du repère. En particulier, on retrouve les cas élémentaires de la variation des moments d'inertie.

C.Z.: 62 — 752:512.25
531.32

DINAMICS OF SINGLE-MASS VIBRATING MACHINES MOUNTED ON ELASTIC SUPPORTS. GENERAL CASE

M. MUNTEANU*

One considers the general case of a single-mass vibrating machine where working member is a rigid body of an arbitrary form sustained by elastic elements and set in motion by periodic external forces. The most general form of the system inertia matrix has been determined. The elastic generalized forces, the dissipative genealized forces and the external generalized forces have been also determined. The linearized system is defined by the constant matrices of inertia, stiffness and dissipative, which have been established too. Some geometric characteristics of the elastic and dissipative systems of forces have been emphasized. Finally, the nonlinear system of differential equations in the most general form and the corresponding linarized system of differential equations have been obtained.

Introduction

The vibration effect on a medium in a technological process, is made by interaction between the working member of a vibrating machine and the medium. In constructing the dynamic model of a single-mass vibrating machine, the working member is considered to be an absolutely rigid body sustained by elastic elements. The stationary vibrations of working member are excited with mechanical, electromagnetical or other types of vibrating generators.

Let us consider the general case when an arbitrary rigid body is elastically connected to the „n" immovable supports in the points $P_i'(i = 1, 2, \ldots n)$, (Fig. 1). Let us model the effect of resistances by „n" dissipative elements applied in points P_i' $(i = 1, 2, \ldots m)$ which may or may not coincide with some of points P_i(Fig. 1). In points $P_i''(i = 1, 2, \ldots p)$ are applied „p" periodic external forces (Fig. 1).

In the sequel, one establishes the general form of the vibration differential equations.

Mass distribution

Let us take a fixed coordinate system $Ox_1x_2x_3$ and a moved coordinate system $O'x_i'x_2'x_3'$ connected to the rigid body. Let be an arbitrary point $A(\underline{x}, \underline{x}')$. Denote by

$$\underline{x} = [\underline{x}_1 x_2 x_3]^T ;$$
$$\underline{x}' = [\underline{x}_1' x_2' x_3']^T \qquad (1)$$

* Leeturer dr. eng., Mecanics Dept.

the column vectors of coordinates, and

$$[\alpha] = \| \alpha_{ij} \|_{i,j=1,2,..6}$$

$$\alpha_{ij} = \cos (\widehat{O_{xi}, O'_{xj}}) \tag{2}$$

the orthogonal matrix of the direction cosines between the axes of coordinate systems.

The relation between the coordinates of point A for an instantaneous position is

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + [\alpha]\, \underline{x}' \tag{3}$$

where $\underline{x}_0 = x_{01}\, x_{02}\, x_{03}]^T$ correspond to the point $O'(\underline{x}_0, \underline{O})$.

For the rigid body one selects the following six generalized coordinates : x_{01}, x_{02}, x_{03} — coordinates of point O' and ψ, φ, θ — Euler's angles specific to vibrations represented in Fig. 2 [1]. The components of matrix (2) in terms of ψ, φ and θ ar :

$$[\alpha] = \begin{cases} \alpha_{11} = \cos\psi \cos\theta \\ \alpha_{12} = \sin\varphi \sin\psi - \cos\psi \cos\varphi \sin\theta \\ \alpha_{13} = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \sin\theta \\ \alpha_{21} = \sin\theta\,; \quad \alpha_{22} = \cos\theta \cos\varphi\,; \\ \alpha_{23} = -\cos\theta \sin\varphi\,; \quad \alpha_{31} = \sin\psi \cos\theta \\ \alpha_{32} = \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \sin\theta \\ \alpha_{33} = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sin\theta \end{cases}$$

The column vector of generalized coordinates is :

$$\underline{q} = [q_1\, q_2 \ldots q_6]^T = [x_{01}\, x_{02}\, x_{03}\, \psi\varphi\theta]^T \tag{5}$$

The general expression of the kinetic energy of a moving rigid body S is :

$$E = \frac{1}{2}\int_S v^2(\underline{q}, \underline{x}')\, \rho(\underline{x}')\, \mathrm{d}x'_1\, \mathrm{d}x'_2\, \mathrm{d}x'_3 \tag{6}$$

where : v — velocity of point A ; ρ — density function.

Since

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_i} = \left[\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right]^T \tag{7}$$

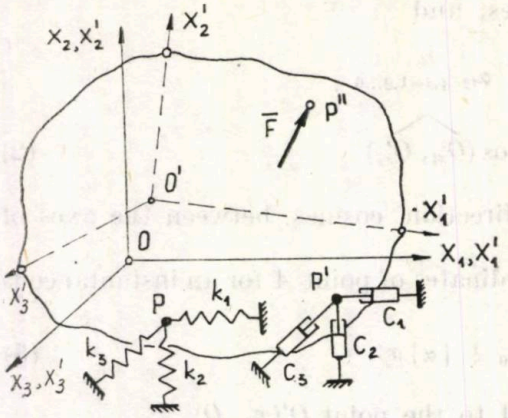


Fig. 1

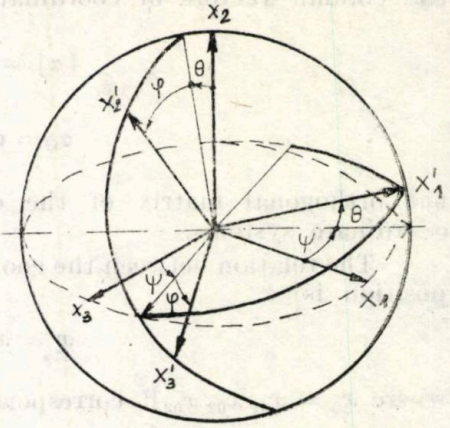


Fig. 2

one can written

$$v = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_r} \dot{q}_r \tag{8}$$

and also

$$v^2 = \frac{\partial \underline{x}^T}{\partial q_r} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s \tag{9}$$

In the relation (9) and in what follows the summarized convention on the repetitive indices in a monomial is used. Taking into consideration the relation (3) and that $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(q_4\ q_5,\ q_6)$ we have

$$\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_s} = \begin{cases} \delta_{rs}\ (r,\ s = 1,\ 2,\ 3) \\ \dfrac{\partial \alpha_{rj}}{\partial q_s} x'_j \begin{pmatrix} s = 4,\ 5,\ 6 \\ r = 1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix}; \\ \dfrac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_r} \cdot \dfrac{\partial \alpha_{nl}}{\partial q_s} x'_j x'_l \begin{pmatrix} r, s = 4,\ 5,\ 6 \\ i, l, n = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{10}$$

δ_{rs} — Kronecker's symbol;

Insert (9) and (10) into (6), yelds

$$E = \frac{m}{2} \sum_{r=1}^{6} \dot{q}_r^2 + \frac{A_j}{2} \sum_{\substack{r=1 \\ s=4}}^{\substack{r=3 \\ s=6}} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s + \frac{J_{jl}}{2} \sum_{r,s=4}^{6} \frac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \alpha_{nl}}{\partial q_j} \dot{q}_r \dot{q}_s \tag{11}$$

The kinetic energy (11) can be put in a homogenous quadratic form with respect to the generalized velocities; that is

$$E = \frac{1}{2} m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T [M] \underline{\dot{q}} \tag{12}$$

where the coefficients m_{rs} depends on the generalized coordinates only $m_{rs} = m\ (q)$ $(r,\ s = 1,\ 2,\ \ldots 6)$.

In virtue of (11) and (12) the matrix of inertia is

$$[M]^T = \begin{bmatrix} [m] & [A] \\ [A]^T & [J] \end{bmatrix} \tag{13}$$

where

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_j \dfrac{\partial \alpha_{1j}}{\partial q_4} & \cdot & A_j \dfrac{\partial \alpha_{1j}}{\partial q_5} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_j \dfrac{\partial \alpha_{3j}}{\partial q_4} & \cdot & A_j \dfrac{\partial \alpha_{3j}}{\partial q_5} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{jl} \dfrac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_4} \cdot \dfrac{\partial \alpha_{nl}}{\partial q_4} & \cdot & J_{jl} \dfrac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_4} \cdot \dfrac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_5} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ J_{jl} \dfrac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_6} \cdot \dfrac{\partial \alpha_{nl}}{\partial q_4} & \cdot & J_{jl} \dfrac{\partial \alpha_{nj}}{\partial q_6} \cdot \dfrac{\partial \alpha_{nl}}{\partial q_5} \end{bmatrix}$$

$$m = \int_S \rho(\underline{x}')\, \mathrm{d}v$$

$$A_j = \int_S x'_j\, \rho(\underline{x}')\, \mathrm{d}V$$

$$J_{jl} = \int_S x'_j x'_l\, \rho(\underline{x}')\, \mathrm{d}V \tag{14}$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x'_1\, \mathrm{d}x'_2\, \mathrm{d}x'_3$$

For small oscillations, namely for $\cos\psi \simeq 1, \sin\psi \simeq \psi, \cos\varphi \simeq 1$, $\sin\varphi \simeq \varphi$, and $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ the matrix $[\alpha$ takes the form :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta & \psi \\ \theta & 1 & -\varphi \\ -\psi & \varphi & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

and, accordingly, the components of the matrix of inertia are

$$[A] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & -A_2 \\ 0 & -A_3 & A_1 \\ -A_1 & A_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad [J] = \begin{bmatrix} J_{x_2'} & -J_{x_2'x_1'} & -J_{x_2'x_3'} \\ -J_{x_1'x_2'} & J_{x_1'} & -J_{x_1'x_3'} \\ -J_{x_3'x_2'} & -J_{x_3'x_1'} & J_{x_3'} \end{bmatrix} \tag{16}$$

where

$$J_{x_j'x_i'} = J_{jl}; \quad \begin{matrix} j \neq i \neq l \\ j,\ i,\ l = 1,\ 2,\ 3 \end{matrix} \qquad J_{xi} = \int_S (x_j'^2 + x_j'^2)\,\rho\, dV. \tag{17}$$

$[A]$ and $[J]$ given by (16) represent the matrix of statical moments and inertia tensor respectively.

When the moving coordinate origin coincides with the center of mass, we have

$$[A] = [0] \tag{18}$$

If the moving coordinate origin system coincides with the principal axes of inertia, we have

$$Jx_j'x_i' = 0 \qquad (j \neq l) \qquad j,\ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{19}$$

Putting the column vector q in the form

$$q = [q'\ q''] \tag{20}$$

where

$$\begin{aligned} \underline{q}' &= [q_1 q_2 q_3]^T = [x_{01} x_{02} x_{03}]^T \\ \underline{q}'' &= [q_4 q_5 q_6]^T = [\psi\ \varphi\ \theta]^T \end{aligned} \tag{21}$$

the kinetic energy (12) for $[A] = [0]$ can be written as

$$E = \frac{1}{2}\,\underline{\dot{q}}'^T [m]\,\underline{\dot{q}}' + \frac{1}{2}\,\underline{\dot{q}}''^T [J]\,\underline{\dot{q}}'' \tag{22}$$

As one can see, the formula (22) contains the kinetic energies of translatory and rotational motion of the rigid body.

Stiffness distribution

Let us denote k_1, k_2, k_3 the linear stiffnesses coefficients of the elastic element from point $P(\underline{x}_p, \underline{x}'_p)$ along the Ox_1, Ox_2 and Ox_3 directions (Fif. 1). The vector column of the elastic force $\underline{F}_e$ is :

$$\underline{F} = [\diagdown k \diagup](\underline{x}_p - \underline{x}_{pe}) = [\diagdown k \diagup](\underline{x}_0 + ([\alpha] - [I]\,\underline{x}'_p) \tag{23}$$

where $\underline{x}_{pe}$ — correspond to the equilibrium position, $[I]$ unit matrix and

$$[\diagdown k \diagup] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Using the derivative operator

$$\nabla_1 = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\ \frac{\partial}{\partial q_2}\ \ldots \frac{\partial}{\partial q_6}\right]^T \tag{25}$$

the virtual work of the elastic force $\underline{F}_e$, can be written as

$$\delta\alpha = \underline{F}_e^T \delta \underline{x}_p = \underline{F}_e^T \nabla_1 \underline{x}_p^T \delta \underline{q} \tag{26}$$

where

$$\nabla_1 \underline{x}_p^T = \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial \underline{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{1p}}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{1p}}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial x_{1p}}{\partial q_6} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_{3p}}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{3p}}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial x_{3p}}{\partial q_6} \end{bmatrix} \tag{27}$$

In accordance with (26) the vector column of generalized elastic force is :

$$\underline{Q}_e = \underline{F} \nabla_1 \underline{x}_p^T \tag{28}$$

Substituting expression (3) for point P into (27) and then into (28) one obtains the components of vector $\underline{Q}_e$:

$$Q_{es} = k_s(x_{0j} - \alpha_{sj} x'_{pj})\ ;\ s = 1,\ 2,\ 3$$

$$Q_{es} = k_1(x_{01} - \alpha_{1j} x'_{pj}) \frac{\partial \alpha_{1r}}{\partial q_s} x'_{pr} + k_2(x_{02} - \alpha_{2j} x'_{pj}) \frac{\partial \alpha_{2r}}{\partial q_s} +$$

$$+ k_3(x_{03} - \alpha_{3j} x'_{pj}) \frac{\partial \alpha_{3r}}{\partial q_s} \tag{29}$$

$$S = 4,\ 5,\ 6$$

In assumption of small oscilations, the force function of the elastic element from point P is :

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} k_i x_{ip}^2 = -\frac{1}{2}\underline{x}_p^T[\diagdown k \diagup]\,\underline{x}_p = -\frac{1}{2}\underline{q}^T[K]\,\underline{q} \tag{30}$$

where $[K]$ is the stiffnesses matrix.

In this case the generalized force component Q_{ej} is

$$Q_{ej} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{31}$$

Setting (3) and (15) into (29) one finally obtains :

$$[K] = \begin{bmatrix} [\diagdown k \diagup] & [A_k] \\ [A_k]^T & [J_k] \end{bmatrix} \tag{32}$$

where $[\diagdown k \diagup]$ is given by (24) and

$$A_k = \begin{bmatrix} k_1 x_3' & 0 & -k_1 x_2' \\ 0 & -k_2 x_3' & k_2 x_1' \\ -k_3 x_1' & k_3 x_2' & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$[J_k] = [\varkappa_{ij}]_{i,j} = 1,\ 2\ \ldots\ 6$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{11} &= k_1 x_3'^2 + k_3 x_1'^2 \\ \varkappa_{12} &= \varkappa_{21} = -k_3 x_1' x_2' \\ \varkappa_{13} &= \varkappa_{31} = -k_1 x_2' x_3' \\ \varkappa_{22} &= k_2 x_2'^2 + k_3 x_2'^2 \\ \varkappa_{23} &= \varkappa_{32} = -k_2 x_1' x_3' \\ \varkappa_{33} &= k_1 x_2'^2 + k_2 x_2'^2 \end{aligned} \tag{34}$$

For all elastic forces acting in $P_i (i = 1, 2, \ldots n)$ we have

$$[K] = \sum_{i=1}^{0} [K]_i \tag{35}$$

One defines three axes $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ and $\bar{\xi}$ by equations (Tig. 3):

$$\bar{\xi}: \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\sum_1^n k_{1i}x'_{2i}}{\sum_1^n k_{1i}}; \\ \zeta_1 = \dfrac{\sum_1^n k_{1i}x'_{3i}}{\sum_1^n k_{1i}}; \end{cases} \qquad \bar{\eta}: \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{\sum_1^n k_{2i}x'_{1i}}{\sum_1^n k_{2i}}; \\ \zeta_2 = \dfrac{\sum_1^n k_{2i}x'_{2i}}{\sum_1^n k_{2i}}; \end{cases} \tag{36}$$

$$\bar{\zeta}: \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{\sum_1^n k_{3i}x'_{1i}}{\sum_1^n k_{3i}x'_{1i}} \\ \eta_3 = \dfrac{\sum_1^n k_{3i}x'_{2i}}{\sum_1^n k_{3i}} \end{cases}$$

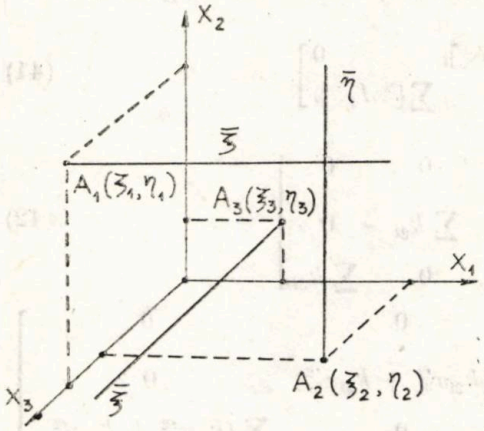


Fig. 3

The cross point between two stiffnesses axes is named *secondary-center of stiffness*. The intersection conditions for two by two axes are:

$$\zeta_1 = \zeta_2; \quad \eta_1 = \eta_3; \quad \xi_2 = \xi_3 \tag{37}$$

When all the equalities (37) are fulfilled we have a single-point of intersection O named center of stiffness. In this case, the components of each elastic elements are in the same ratio:

$$k_{1i} : k_{2i} : k_{3i} = a : b : c.$$

Particular cases:

a) It is easy to see that if $\sum_1^n k_{1i}x'_{2i} = \sum_1^n k_{1i}x'_{3i}$; $\bar{\xi}$ coincide with Ox'_1 if $\sum k_{2i}x'_{1i} = \sum k_{2i}x'_{3i}$; $\bar{\eta}$ coincide with Ox'_2, and if $\sum k_{3i}x_{1i} = \sum k_{3i}x'_{2i}$; $\bar{\zeta}$ coincide with Ox'_2.

b) Center of stiffness coincide with the moved coordinate system origin when

$$\begin{aligned} \sum k_{1i}x'_{2i} &= 0 & \sum k_{1i}x'_{3i} &= 0 \\ \sum k_{2i}x'_{1i} &= 0 & \sum k_{2i}x'_{3i} &= 0 \\ \sum k_{3i}x'_1 &= 0 & \sum k_{3i}x'_{2i} &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

c) If, for instance Ox_1 coincide with $\bar{\zeta}$ and moreover we have

$$\sum_1^n k_{2i}x'_{1i}x'_{3i} = 0\,; \qquad \sum_1^n k_{3i}x'_{1i}x'_{3i} = 0 \tag{39}$$

the Ox_1 axis is a principal axis of stiffness.

When

$$\sum k_{1i}x'_{2i}x'_{3i} = 0\,; \qquad \sum k_{2i}x'_{1i}x'_{3i} = 0$$

$$\sum k_{3i}x'_{1i}x'_{2i} = 0 \tag{40}$$

all the axes are principal axes of stiffness, and te point O is the principal center of stiffness. So, the matrix (35) takes the diagonal form

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum [k]_i & 0 \\ 0 & \sum [J_4]_i \end{bmatrix} \tag{41}$$

where

$$\sum [k]_i = \begin{bmatrix} \sum k_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & \sum k_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \sum k_{3i} \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$\sum [J_k]_i = \begin{bmatrix} \sum (k_{1i}x'^2_{3i} + k_{3i}x'^2_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & \sum (k_{2i}x'^2_{3i} + k_{3i}x'^2_{2i}) & 0 \\ 0 & 0 & \sum (k_{1i}x'^2_{2i} + k_{2i}x'^2_{1i} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Resistance distribution

Let us denote c_1, c_2, c_3 the equivalent linear coefficients of resistan of the dampers from point P' along the Ox_1, Ox_2, and Ox_3 directions.

Calculus relations for equivalent linear coefficients of resistance for some characteristic types of resistance are given in paper [2].

The vector column of dissipative force $\underline{F}_d$ is:

$$\underline{F}_d = [c]\,\dot{\underline{x}}_{p'} = [c](\dot{\underline{x}}_p + [\dot{\alpha}]\underline{x}'_{p'}) \tag{44}$$

where

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \tag{45}$$

The vector column of generalized dissipative force is

$$\underline{Q}_d = \underline{F}_d^T \nabla_1 \underline{x}_{p'}^T \tag{46}$$

The components of vector $\underline{Q}_d$ are:

$$Q_{ds} = c_s(\dot{x}_{0j} - \dot{\alpha}_{sj}x'_{p'j}) \qquad s = 1,\ 2,\ 3.$$

$$Q_{ds} = c_1(\dot{x}_{01} - \dot{\alpha}_{1s}x'_{p'j})\frac{\partial \alpha_1 r}{\partial q_s}x'_{pr} + c_2(\dot{x}_{02} - \dot{\alpha}_{2j}x'_{p'j})\frac{\partial \alpha_2 r}{\partial q_s}x'_{p'r} +$$

$$+ c_3(\dot{x}_{03} - \alpha_{3j}x'_{p'j})\frac{\partial x_3 r}{\partial q_s}x'_{p'r}. \tag{47}$$

In assumption of small oscillations one can introduce the Rayleigh's dissipative function, for the dissipative element in point P':

$$\mathscr{R} = \frac{1}{2}\dot{\underline{x}}^T_{p'}[\diagdown c \diagup]\dot{\underline{x}}_{p'} = -\frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T[C]\dot{\underline{q}} \tag{48}$$

and consequently

$$Q_{ds} = \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots 6) \tag{49}$$

From (48) one obtains the dissipative matrix $[C]$:

$$[C] = \begin{bmatrix} [\diagdown c \diagup] & [A_C] \\ [A_C]^T & [J_C] \end{bmatrix} \tag{50}$$

where $[\diagdown c \diagup]$ is given by (44) and

$$[A_C] = \begin{bmatrix} c_1x'_3 & 0 & -c_1x'_2 \\ 0 & -c_2x'_3 & c_2x'_1 \\ -c_3x'_1 & c_3x'_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$[J_C] = [\beta_{ij}]_{i,\,j\,=\,1,\,2\,\ldots\,6}$$

$$\beta_{11} = c_1x'^2_3 + c_3x'^2_1$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -c_3x'_1x'_2$$

$$\beta_{13} = \beta_{31} = -c_1x'_1x'_3 \tag{52}$$

$$\beta_{22} = c_2x'^2_3 + c_3x'^2_2$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = c_2x'_1x'_3$$

$$\beta_{33} = c_1x'^2_2 + c_2x'^2_1$$

For all dissipative forces acting in $P_i'(i = 1, 2, \ldots m)$ we have:

$$[C] = \sum_{i=1}^{m} [C]_i \tag{53}$$

One can see that the matrices (32) ÷ (34) and matrices (50) ÷ (52) have the same structure. Namely, replacing $k_j(j = 1, 2, 3)$ by c_j $(j = 1, 2, 3)$ the group (32) ÷ (34) becomes (50) ÷ (52) and inverse.

Accordingly, one can define in a similar manner as in the foregoing point, the axes of resistance, the principal axes of resistance, the center of resistance, the secondary centers of resistance and the principal center of resistance.

All the previous considerations reffering to particular cases of stiffnes distribution are also valid for resistance distribution along with the formulas (36) ÷ (43), where we must replaced k by c.

External Forces

The vector column of external periodic force applied in τoint P'' is

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{x}_{p''}, t) = [F_{x1}(\underline{x}_{p''}, t)\, F_{x2}(\underline{x}_{p''}, t)\; F_{x3}(\underline{x}_{p''}, t)]^T \tag{54}$$

The vector column of generalized external force $\underline{F}$ is

$$Q_f = \underline{F} \bigtriangledown_1 \underline{x}^T p'' \tag{55}$$

The components of vector Q_f are:

$$Q_{fs} = F_{x_s}(\underline{x}_{p''}, t) \qquad s = 4,\ 5,\ 6$$

$$Q_{fs} = F_{x_i}(\underline{x}_{p''}, t) \left[\frac{\partial \alpha_{ir}}{\partial q_s}\right] x'_{p''t} \qquad s = 4, 5, 6 \tag{56}$$

For small oscillations introducing (15) into (54) one obtains:

$$\begin{aligned} Q_{fs} &= F_{x_s}(t) \qquad s = 1,\ 2,\ 3 \\ Q_{f_4} &= F_{x_1} \cdot x'_3 - F_{x_3} \cdot x'_1 \\ Q_f &= F_{x_3} \cdot x'_2 - F_{x_2} \cdot x'_3 \\ Q_{f_6} &= F_{x_2} \cdot x'_1 - F_{x_1} \cdot x'_2 \end{aligned} \tag{57}$$

For all external forces applied in P'' $(i = 1, 2, .. p)$ we have:

$$Q_{fs} = \sum_{i=1}^{p} Q_{fsi} \qquad s = 1,\ 2 \ldots 6 \tag{58}$$

For the sake of simplicities one has been used the same notations for coordinates of P, P' and P''.

If the resultant of external forces pass through the origin of coordinate system, then $Q_{f4} = Q_{f5} = Q_{f6} = 0$.

Differential equations

Using (25) and the following similar derivative operator

$$\nabla_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \dot{q}_6} \right]^T \tag{59}$$

the Lagrange's equations can be written as:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla_2 E) - \nabla_1 E = \underline{Q} \tag{50}$$

where

$$\underline{Q} = \underline{Q}_e + \underline{Q}_a + \underline{Q}_f \tag{61}$$

Let u and v column vectors of same dimension. There is the obvious relation:

$$\nabla(\underline{u}^T \underline{v}) = (\nabla \underline{u}^T)\,\underline{v} + (\nabla \underline{v}^T)\,\underline{u} \tag{62}$$

Using (12) and (62) one obtains:

$$\nabla E = \frac{1}{2}[M]\dot{\underline{q}} + \frac{1}{2}[M]\,\dot{\underline{q}} = [M]\,\dot{\underline{q}} \tag{63}$$

then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla_2 E) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([M]) \cdot \dot{\underline{q}} + [M]\,\ddot{\underline{q}} \tag{64}$$

Let us consider the ith row from $[M]$, written as row matrix

$$\{m_i\} = [m_{i1} m_{i2} \ldots . m_{i6}] \tag{65}$$

Then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{m_i\} = \left[\sum_{i=1}^{6} \frac{\mathrm{d}m_{i1}}{\partial q_s} \dot{q}_s \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial m_{i2}}{\partial q_s} \dot{q}_s \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial m_{i6}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right] = \dot{\underline{q}}^T [\nabla_1 \{m_i\}]^T \dot{\underline{q}} \tag{66}$$

Hence, the expression (64) for the row i become

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla_2 E)_i = \dot{\underline{q}}^T [\nabla_1 \{m_i\}]^T \dot{\underline{q}} + \{m_i\}\,\dot{\underline{q}} \tag{67}$$

On the other hand

$$\Delta_1 E = \frac{1}{2} \nabla_1(\underline{\dot{q}}^T [M] \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T (\nabla_1 [M] \underline{\dot{q}} \tag{68}$$

and for the row i, the expression (68) is :

$$(\nabla_1 E)_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right) \{m_{ij}\}) \underline{\dot{q}} \tag{69}$$

Therefore, the ith differential equation of movement is :

$$\{m_i\} \underline{\ddot{q}} + \underline{\dot{q}}^T (\nabla_1 \{m_i\})^T \underline{\dot{q}} - \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \{m_i\} \right) \underline{\dot{q}} = Q_i \tag{70}$$

A more expanded form of the equation (70) is :

$$\{m_i\} \underline{\ddot{q}} + \underline{\dot{q}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial m_{i1}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial m_{i6}}{\partial q_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial m_{i1}}{\partial q_6} & \cdots & \frac{\partial m_{i6}}{\partial q_6} \end{bmatrix} \dot{q} - \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_i} & \cdots & \frac{\partial m_{16}}{\partial q_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial m_{61}}{\partial q_i} & \cdots & \frac{\partial m_{66}}{\partial q_i} \end{bmatrix} \underline{\dot{q}} = Q_i \tag{71}$$

Another expanded form, more appropiate for an abreviate writting is :

$$\{m_i\} \underline{\ddot{q}} + \left\{ \frac{\mathrm{d} m_{i1}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_i} \cdots \frac{\partial m_{i6}}{\partial q_6} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{66}}{\partial q_i} \right\} \dot{\underline{q}}^2 + \tag{72}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial m_{i1}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{i2}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_i} \cdots \cdots \frac{\partial m_{i6}}{\partial q_r} + \frac{\partial m_{ir}}{\partial q_6} - \frac{\partial m_{6r}}{\partial q_i} \right\} \underline{\dot{q}\dot{q}} = Q_i$$

The system of differential equations given by (72) for $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots 6$ can be put in the following form :

$$[M] \underline{\ddot{q}} + [B] \underline{\dot{q}\dot{q}} + [D] \dot{q}^2 = \underline{Q} \tag{73}$$

when $[M]$ is given by (13), $\underline{Q}$ is given by (51), (29), (47), (56) and :

$\underline{\dot{q}\dot{q}}$ — column vector of a combinations of 6 elements, 2 at a time; therefore, the column member of terms are given by the binominal coefficient C_6^2.

$$[B] = \| b_{ij} \| \begin{matrix} j = 1, \ 2 \ldots c_6^2 = 15 \\ i = 1, \ 2 \ \ldots 6 \end{matrix} \tag{74}$$

$$b_{ij} = \frac{\partial m_{il}}{\partial q_r} + \frac{\partial m_{ir}}{\partial q_l} - \frac{\partial m_{lr}}{\partial q_i}$$

j — the indicative of the r_i combination corresponding to $\dot{q}_r\dot{q}_i$

$$[D] = \| \alpha_{ik} \|_{i,\,k\,=\,1,\,2,\,\ldots\,6}$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{kk}}{\partial q_i} \tag{75}$$

The linearized matrix equation (73) is:

$$[M]\ddot{\underline{q}} + [C]\dot{\underline{q}} + [K]\underline{q} = \underline{Q}_f \tag{76}$$

where $[M]$, $[K]$, $[C]$ and $\underline{Q}_f$ are given by (13), (35), (53) and (56).

General remarks

We shall call the system complet centred if the resultant of the elastic forces, the resultant of dissipative forces and the resultant of external forces pass all the time through the center of mass. In other words that requiers the existence of stiffness and resistance centers which must coincide with the center of mass.

If the system is complet centred and the axes of coordinate system placed in the center of mass are also principal axes of inertia, of stiffness and of resistance, the matrices $[M]$, $[C]$, and $[K]$ are diagonals i. e., the differential equations of system (76) are uncoupled. In this case, the stationary motion of rigid body is a translatory one if the external excitation is made by forces, and if the external excitation is made by moments the rigid body performs only rotation motion.

When the three centers exist but not coincide each other, the system is partially centred. Such a vibrating machine is analysed in paper [3].

Let us consider that the rigid body is subjected to ideal finite stationary constraints. Analytically a constraint is expressed by the equations $q_i = 0$ $i \in \{1, 2, \ldots 5\}$ so the number of differential equations (73) will be adequately reduced.

Some of main problems of a vibrating machine from the dynamic point of view are:

— to find the periodic solutions of the nonlinear system of differential equations, or the stationary solutions of the linearized sytem;

— to establish the stability conditions and the self — sinchronization conditions when the vibrating machine is excited by several vibration generators;

— to analyse the transient motion;

— to study the interaction between the mechanical system and the driving system of the machine;

But, first, we must write for every particular case the system of differential equations established in this paper.

REFERENCES

1. *P. Gainev, V. O. Kononenko*, Kolebania tverdih tel., Izdatelstvo „Nauka", Moskva, 1976
2. *M. Munteanu*, Third IFTOMM International Symposium on Linkage and Computer Aided Design Methods., Vol. 1—2, Bucharest, July 1981.
3. *M. Munteanu*, JSPE — IFTOMM International Symposium on Design and Synthesis. Tokyo, Japan, July 1984.

Dinamica mașinilor vibratoare monomasice montate pe suporți elastici. Cazul general

Se consideră cazul unei mașini vibratoare monomasice cu organul de lucru considerat ca un solid rigid de formă oarecare, sprijinit pe elemente elastice și antrenat de forțe periodice exterioare. Este determinată matricea de inerție a sistemului sub forma cea mai generală precum și forțele generalizate elastice, disipative și exterioare. Sînt determinate de asemenea matricile constante de inerție, de elasticitate și disipativă ce definesc sistemul liniarizat. Se pun în evidență unele caracteristici geometrice ale sistemelor de forțe elastice și disipative. În final se obține sistemul de ecuații diferențiale neliniare ale mișcării în forma cea mai generală și sistemul asociat de ecuații diferențiale liniare.

C. Z.: 621. 18: 662. 743

ÎNLOCUIREA PĂCURII PRIN VALORIFICAREA COMBUSTIBILILOR SOLIZI LA O PLATFORMĂ INDUSTRIALĂ CHIMICĂ (UVCP DE LA COMBINATUL CHIMIC TN. MĂGURELE)

T. POPESCU, L. MIHĂESCU, N. PANOIU, I. OPREA*

În cadrul uzinei de valorificare a cenușilor de la C.C. Tn. Măgurele se consumă păcură la centrala termică în scopul producerii de abur la cazane și la liniile de prelucrare tehnologică a cenușilor.

În lucrare se prezintă cercetările întreprinse pentru înlocuirea păcurii cu combustibil solid (huilă sau cocs de petrol) la cazanele de 10 t/h ale centralei termice.

1. Aspecte generale ale înlocuirii păcurii la centrala termică

În cadrul uzinei de valorificare a cenușilor de la C.C. Tn. Măgurele se consumă păcură la centrala termică în scopul producerii de abur în cazane și la liniile de prelucrare tehnologică a cenușilor. Aceste linii cuprind cuptoare rotative asemănătoare cu cele din industria cimentului.

Lucrarea prezintă numai cercetările întreprinse pentru înlocuirea păcurii la centrala termică. Aceasta are 6 cazane a cîte 10 t/h (2,8 kg/s) tip CR 16/2, așezate pe două rînduri față în față.

La trecerea funcționării cazanelor de pe păcură pe combstibil solid s-au avut în vedere posibilitățile utilizării unor deșeuri combustibile (huilă sau cocs de petrol), măcinate centralizat la o mare finețe în mori cu bile în cadrul liniilor tehnologice ale întreprinderii. Această posibilă măcinare în cadrul liniilor tehnologice existente a reprezentat un mare avantaj, costul trecerii cazanelor la funcționarea cu praf de combustibil solid fiind foarte redus.

2. Caracteristicile combustibilului solid utilizat

Huila utilizată provine din Valea Jiului, iar prin procedeul de spălare în cadrul întreprinderii miniere, a fost livrată la o calitate superioară, avînd următoarele caracteristici:

— cenușă la starea inițială $A^i = 8{,}2\ \%$
— sulf combustibil la starea inițială, $S_c^i = 2{,}49\%$
— umiditatea totală la starea inițială, $W_t^i = 12{,}1\%$
— carbon fix la starea inițială, $C_f^i = 51{,}3\%$
— volatile raportate la masa combustibilă, $V^{mc} = 40{,}4\%$
— putere calorică inferioară la starea inițială, $Q_i^i = 6220$ kcal/kg.

Finețea de măcinare a fost caracterizată printr-un rest pe sita cu ochiuri de 0,09 mm, $R_{0,09} = 8-14\%$.

* Ing.; Șef. lucrări dr. ing.; Conf. dr. ing.; Asist. ing., catedra Cazane și turbine

Se remarcă o putere calorică ridicată dar și un conținut destul de mare de umiditate, aceasta conducînd în anotimpul rece la înfundări parțiale ale instalațiilor de transport.

Praful de cocs de antracit a avut următoarea analiză elementară medie:

— umiditate de îmbibație, $W_i^i = 6{,}60\%$
— umiditatea higroscopică, $W_h^i = 0{,}40\%$
— umiditate totală la starea inițială:

$$W_t^i = W_i^i + W_h^i = 6{,}60 + 0{,}40 = 7{,}00\%$$

— cenușa la starea inițială, $A^i = 1{,}10\%$
— cenușa la proba anhidră, $A^{anh} = 1{,}20\%$
— hidrogen la starea inițială, $H^i = 4{,}31\%$
— sulf combustibil la starea inițială, $S_c^i = 1{,}50\%$
— carbonul la starea inițială, $C^i = 81{,}50\%$
— azotul la starea inițială, $N^i = 0{,}92\%$
— oxigenul la starea inițială, $O^i = 3{,}61\%$

Conținutul de materii volatile la starea inițială a fost de 9,40% ($V^i = 9{,}40\%$), iar carbonul fix de 82,50% ($C_f^i = 82{,}50\%$).

Se remarcă un redus conținut de materii volatile, cu repercusiuni negative asupra aprinderii norului de particule.

Puterea calorică superioară la starea inițială;

$$Q_s^i = 8021 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg}}$$

Puterea calorică inferioară la stare inițială:

$$Q_i^i = 7750 \text{ kcal/kg}$$

Pentru a se asigura aprinderea, finețea de măcinare trebuie să fie foarte ridicată. Praful de cocs de petrol utilizat a avut o finețe medie, caracterizată prin restul pe sită cu ochiul de 0,09 mm de 10—12% ($R_{0,09} = 10-12\%$).

3. Caracteristicile cazanelor trecute la funcționarea cu combustibil solid

Așa cum s-a menționat anterior, cazanele de tipul CR 16/2, construcție Vulcan, prezentate în fig. 1, sînt cu drumuri orizontale ale gazelor de ardere, cu arderea cu suprapresiune, etanșarea făcîndu-se cu ajutorul pereților ecran de tip membrană.

Cazanul este echipat cu un arzător de păcură amplasat frontal, cu turbionarea aerului secundar cu ajutorul unor palete fixe. Aprinderea se realizează cu ajutorul unui arzător pilot de gaze obținut de la o butelie. Reglajul aerului la aprindere se face manual. Caracteristicile arzătorului de păcură sînt menționate mai jos:

Debit maximum de păcură 820 kg/h;
Debit minim de păcură 320 kg/h;

Presiune injecție	30 bar;
Unghi evazare	70°;
Temperatura păcurii	130°C;
Debit de aer	19000 m^3/h;
Temperatură aer	200°C;
Presiune aer	430 mm H_2O

Datorită suprapresiunii, cazanul nu mai are ventilator de gaze de ardere. Toate aceste caracteristici menționate, au constituit probleme grele de rezolvat, deoarece arderea cu flacără orizontală și cu suprapresiune nu se recomandă la praful combustibil solid.

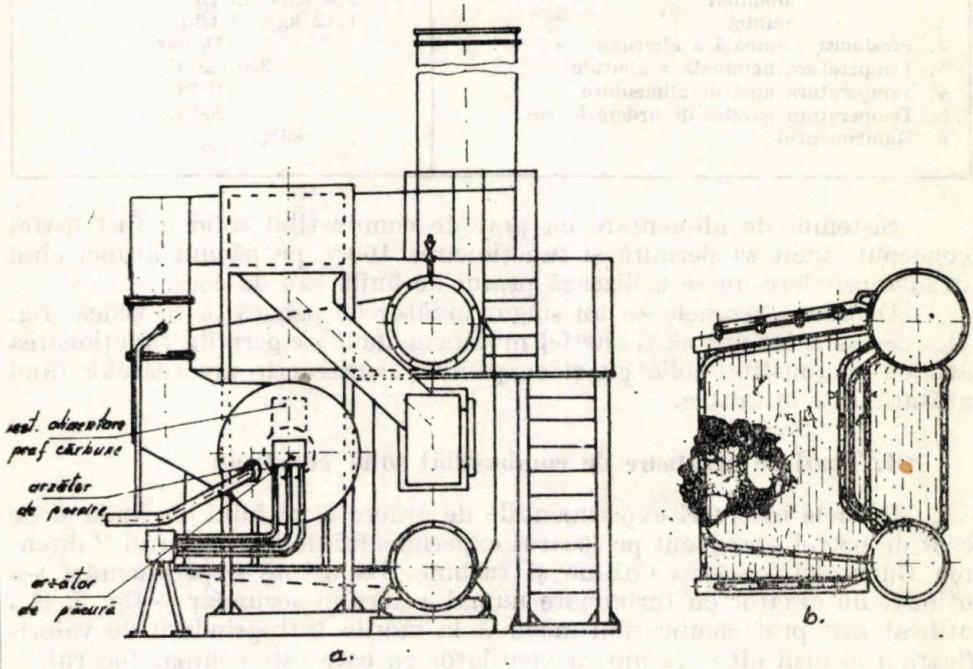


Fig. 1. — Detalii constructive ale cazanului CR 16/2 de 10 t/h care a fost trecut de la funcționarea cu păcură la funcționarea cu praf de combustibil solid.
a) vedere frontală;
b) secțiune frontală.

Așa cum se remarcă din desenul cazanului, acestuia nu i se poate adapta un sistem de pîlnii pentru evacuarea zgurei. S-a admis atunci soluția (ținindu-se seama de conținutul redus de zgură și de finețea mare de măcinare care conduce la un ridicat procent de antrenare a particulelor de cenușă spre coș) ca un cazan să funcționeze o perioadă de timp fără evacuarea de zgură, iar cînd aceasta umple pînă la un anumit nivel focarul, cazanul să fie oprit pentru curățat. S-a ajuns la o funcționare de 1—3 luni, în funcție de sarcina utilizată. Se vor face și probe încercări de prelungire a duratei de funcționare prin suflarea depunerilor cu ajutorul unor lănci de aer comprimat.

În tabelul 1 se prezintă caracteristicile constructive — funcționale de proiect ale cazanului CR 16/2.

Pentru alimentarea cu praf de combustibil solid, acesta este extras de la mori și depozitat într-un buncăr de stocaj al centralei termice, alimentarea la nivelul arzătoarelor făcîndu-se printr-o rețea special construită. Presiunea la insuflare la nivelul arzătoarelor trebuie să fie mai mare de 430 mm H_2O pentru a se învinge suprapresiunea din focar.

Tabelul 1

Caracteristicile cazanului de abur CR 16/2 la funcționarea cu păcură

1. Debit abur :	
nominal	2,8 kg/s (10 t/h)
minim	1,12 kg/s (4 t/h)
2. Presiunea nominală a aburului	15 bar
3. Temperatura nominală a aburului	350 ± 20°C
4. Temperatura apei de alimentare	100°C
5. Temperatura gazelor de ardere la coș	206°C
6. Randamentul	89 %

Sistemul de alimentare cu praf de combustibil solid a fost astfel conceput încît să permită și funcționarea 100% pe păcură atunci cînd în întreprindere nu se utilizează praful de huilă sau de cocs.

Deoarece cazanele au un singur arzător de păcură (a se vedea fig. 1), aceasta a trebuit să fie astfel modificat încît să permită funcționarea atît cu combustibil solid cît și cu păcură, construcția arzătoarelor fiind arătată în continuare.

4. Tipul de arzătoare de combustibil solid construite

Primele încercări experimentale de ardere a prafului de huilă și de cocs de petrol s-au făcut pe focarul experimental de la Institutul Politehnic București, catedra Cazane și turbine. La aceste experimentări s-a utilizat un arzător cu turbionare numai a aerului secundar — fig. 2. S-a utilizat atît praf combustibil măcinat la morile Intreprinderii de valorificare a cenușii cît și la moara ventilator cu care este echipat focarul.

Cu toate că s-au făcut toate reglajele posibile pentru a se mări finețea de măcinare la utilizarea morii ventilator, finețea de măcinare nu a depășit una caracterizată prin restul pe sita cu ochiul de 0,09 mm de 30%, valoriile medii fiind $R_{0,09} = 30-40\%$. Chiar cu această finețe grosolană de măcinare, aprinderea acestor combustibili s-a realizat bine, încurajînd astfel trecerea la construcția arzătoarelor reale.

În cursul cercetărilor la scară industrială, au fost construite mai multe arzătoare. În continuare, se vor prezenta două arzătoare, care au dat cele mai bune rezultate.

Primul arzător cu un debit maximum de combustibil solid de 1 t/h prezentat în fig. 3, a derivat din cele de păcură cu care era echipat cazanul. Astfel, s-a menținut diametrul ambrazurii 1 constant, precum și carcasa 3 de admisie a aerului secundar. Turbionarea aerului secundar s-a realizat tot cu ajutorul paletelor radiale fixe 4, existente la carcasa arzătorului de păcură. S-a modificat însă sistemul de ghidaj a construc-

ției interioare, utilizîndu-se știfturile 8 în locul unor table dispuse radial, deoarece acestea distrugeau în mare parte componenta rotațională a aerului secundar.

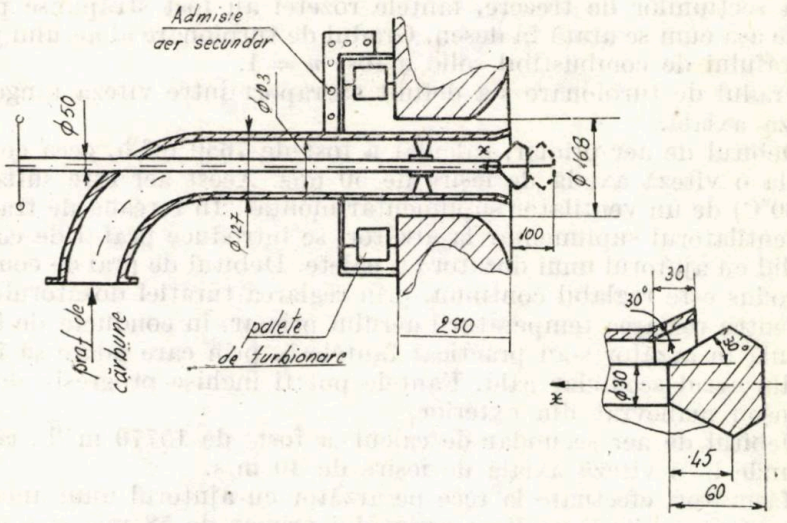


Fig. 2. — Arzătorul pilot cu turbionarea numai a aerului secundar cu care s-au făcut experimentările de ardere a prafului de huilă și cocs de petrol la Institutul Politehnic București.

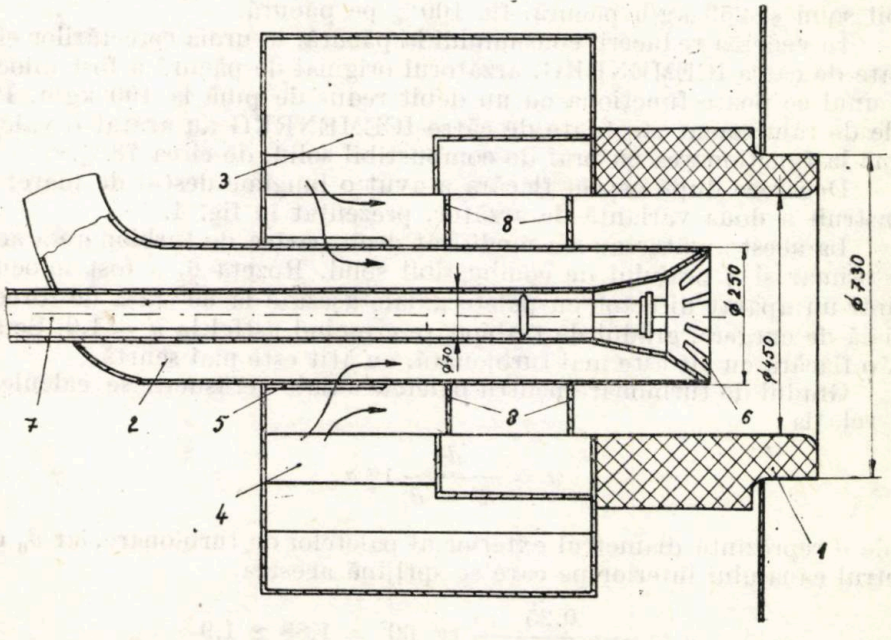


Fig. 3. — Arzător turbionar (varianta I) cu care a fost echipat cazanul CR 16/2.

Praful de combustibil solid s-a introdus prin tubulatura 2 special construită și care încadrează injectorul de păcură identic cu cel anterior. Turbionarea aerului primar și a prafului de combustibil solid se realizează cu rozeta 6, utilizată anterior la turbionarea jetului de păcură. Pentru mărirea secțiunilor de trecere, fantele rozetei au fost străpunse pînă la periferie așa cum se arată în desen. Gradul de turbionare al aerului primar și al prafului de combustibil solid a fost $n = 1$.

Gradul de turbionare s-a definit ca raport între viteza tangențială și viteza axială.

Debitul de aer primar, calculat a fost de 7650 m³/h, ceea ce corespunde la o viteză axială de ieșire de 50 m/s. Acest aer este suflat rece (circa 20°C) de un ventilator suplimentar montat. În rețeaua de transport de la ventilatorul suplimentar la arzător, se introduce praful de combustibil solid cu ajutorul unui dozator cu palete. Debitul de praf de combustibil introdus este reglabil continuu, prin reglarea turației dozatorului.

Pentru reglarea temperaturii aerului primar, în conducta de intrare a acestuia în arzător s-au practicat fantele 5, prin care poate să intre o parte din aerul secundar cald. Fantele pot fi închise progresiv de către un manșon manevrat din exterior.

Debitul de aer secundar de calcul a fost de 15770 m³/h, ceea ce corespunde la o viteză axială de ieșire de 40 m/s.

Măsurători efectuate la rece pe arzător cu ajutorul unui anemometru au arătat o viteză medie a agentului primar de 58 m/s și a aerului secundar de 39 m/s. Dacă se ține seama și de corecția cu temperatura pentru aerul secundar, se remarcă realizarea unei viteze ceva mai mari decît cele preconizate, arzătorul arătînd astfel disponibilități de reglaj.

Arzătorul proiectat a putut lucra cu o sarcină de 800 kg/h combustibil solid și 250 kg/h păcură, fie 100% pe păcură.

În vederea reducerii consumului la păcură, în urma cercetărilor efectuate de către ICEMENERG, arzătorul original de păcură a fost înlocuit cu unul ce poate funcționa cu un debit redus de pînă la 100 kg/h. Probele de randament efectuate de către ICEMENERG au arătat o valoare bună la funcționarea cu praf de combustibil solid, de circa 78%.

Deoarece după aspect flacăra a avut o lungime destul de mare, s-a construit a doua variantă de arzător, prezentat în fig. 4.

La acest arzător nu s-a modificat decît partea de turbionare a aerului primar și a prafului de combustibil solid. Rozeta 6, a fost înlocuită printr-un aparat director cu palete axiale așezate la 60° față de direcția axială de curgere, gradul de turbionare crescînd astfel la $n = 1{,}9$. Se știe că, o flacără cu cît este mai turbionată, cu atît este mai scurtă.

Gradul de turbionare pentru paletele axiale nerăsucite se calculează cu relația :

$$n = \frac{d^2}{d^2 - d_0^2} \operatorname{tg} \alpha \qquad (1)$$

unde d reprezintă diametrul exterior al paletelor de turbionare, iar d_0 diametrul canalului interior pe care se sprijină acestea.

$$n = \frac{0{,}25}{0{,}25^2 - 0{,}07^2} \operatorname{tg}\ 60° = 1{,}88 \simeq 1{,}9$$

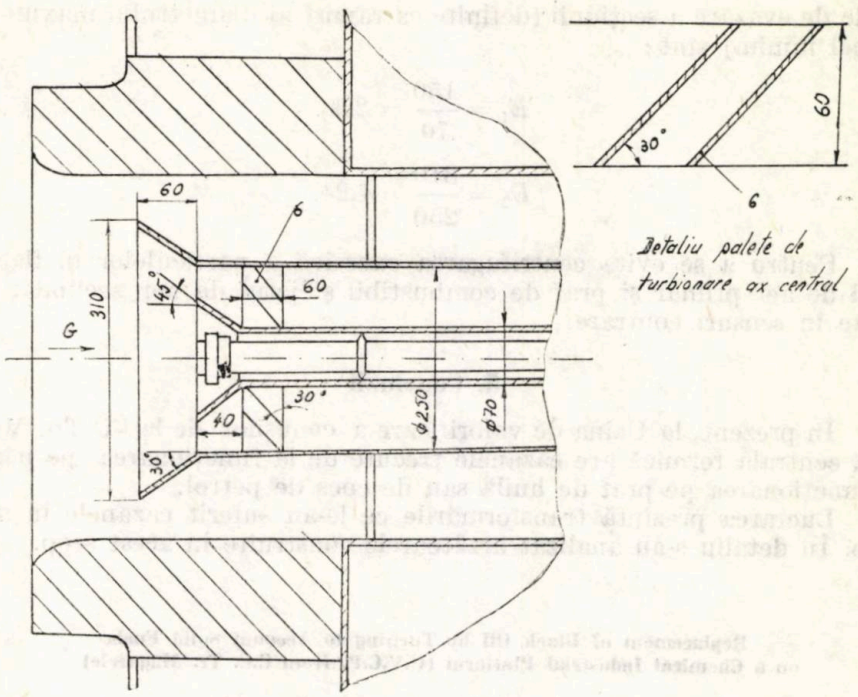


Fig. 4. — Arzător turbionar (varianta II) perfecționat desprins din cel prezentat în fig. 3.

Lungimea jetului va fi:

$$L = d\left(\frac{11}{n_p}\right)^{0,66} \tag{2}$$

unde gradul de turbionare n_p se determină cu ajutorul relației:

$$n_p = \frac{8}{3\pi} d \frac{d^3 - d_0^3}{(d^2 - d_0^2)^2} \operatorname{tg} \alpha \tag{3}$$

$$n_p = \frac{8}{3\pi} 0,25 \frac{0,25^3 - 0,07^3}{(0,25^2 - 0,07^2)^2} \operatorname{tg} 60° = 1,69$$

de unde:

$$L = 0,25\left(\frac{11}{1,69}\right)^{0,66} = 0,86 \text{ (m)}$$

Deoarece structura flăcărilor turbionare [2] depinde în mare măsură și de evazarea secțiunii de ieșire, la noul arzător s-a modificat evazarea canalului de ieșire a jetului de aer primar și praf de combustibil. Rapor-

turile de evazare a secțiunii (definite ca raport al diametrului maxim față de cel minim) sînt :

$$E_1 = \frac{150}{70} = 2{,}1$$

$$E_2 = \frac{310}{250} = 1{,}24$$

Pentru a se evita centrifugarea excesivă a particulelor în flacără, jetul de aer primar și praf de combustibil și jetul de aer secundar sînt rotite în sensuri contrare.

5. Concluzii

În prezent, la Uzina de valorificare a cenușilor de la CC Tn. Măgurele, centrala termică are cazanele trecute de la funcționarea pe păcură la funcționarea pe praf de huilă sau de cocs de petrol.

Lucrarea prezintă transformările ce le-au suferit cazanele în acest scop. În detaliu s-au analizat arzătoarele construite în acest scop.

Replacement of Black Oil by Turning to Account Solid Fuels on a Chemical Industrial Platform (U.V.C.P. from C.C. Tr. Măgurele)

Black oil has been replaced by oil coke or bituminous coal coke on waste heat boilers of 10 t/h in the power station.
This paper points out the results of the above mentioned replacements.

C.Z.: 621. 77
62—23
621. 83

CONTRIBUTIONS THÉORIQUES SUR LA SYNTHÈSE OPTIMALE DU MÉCANISME À FORMER PAR ÉTIRAGE

C. D. STĂNESCU, MARIA PETRESCU, C. PETRESCU*

Dans cet ouvrage on présente les contributions théoriques des auteurs sur la synthèse optimale du mécanisme à former par étirage, projeté et réalisé sur la base du contract de recherche.

Le mécanisme est constitué par deux dyades d'aspect 2 et une seule couple cinématique de translation commune.

Ce mécanisme est destiné à former par étirage des tôles et des profils des alliages (aluminium, dural, acier, etc), utilisés dans la construction des machines, en particulier, dans l'industrie des voitures et aéronautique.

1. Introduction

Le mécanisme à former par étirage est un mécanisme de conception originale, projeté et réalisé par les auteurs sur la base du contract de recherche.

Ce mécanisme est destiné à former par étirage des profils et des tôles de différents alliages (aluminium, acier, duralumin, etc.) utilisés dans la construction des machines.

2. Principe de formage par étirage

Le principe général de formage par étirage, appelé parfois formage par tendage (fig. 1) est extrèmement simple et constitue de loin la meuilleure méthode de formage pour les pièces de grandes dimensions et ouvertes, en particulier les revétements de voiture et fuselage. Le développement considérable de cette méthode est une conséquence de l'accroisement des dimensions de pièces de ce genre.

Les phases successives illustrées par la figure 1 sont les suivantes :

— a) la tôle (1) este mise sous tension :
— b) la tôle est enroulée sur l'outil (2) ;
— c) l'outil est imprimé complètement dans la tôle.

Afin d'éviter l'effort de ressort, on travaille le matérial de façon à dépasser légèrement sa limite élastique d'environ 3 daN. Comme l'on procède par allongement, les pièces collent au poinçon au contact duquel se trouve la fibre neutre ; on évite donc les inconvenients de l'emboutissage classique à deux outils qui donne naissance à une partie comprimée produisant un effet de rétreint.

Les matériaux d'outillage varient selon le nombre de pièces à réaliser, leur forme, leur épaisseur et la matière de la tôle, facteurs qui sont

* Maître de conférences ; Lecteur ; Ing. Chaire de Technologie des matériaux et soudure

examinés en considération de l'amortissement, de la résistance, de la plus au moins grande tendance à l'usure du poinçon et de sa capacité de poli.

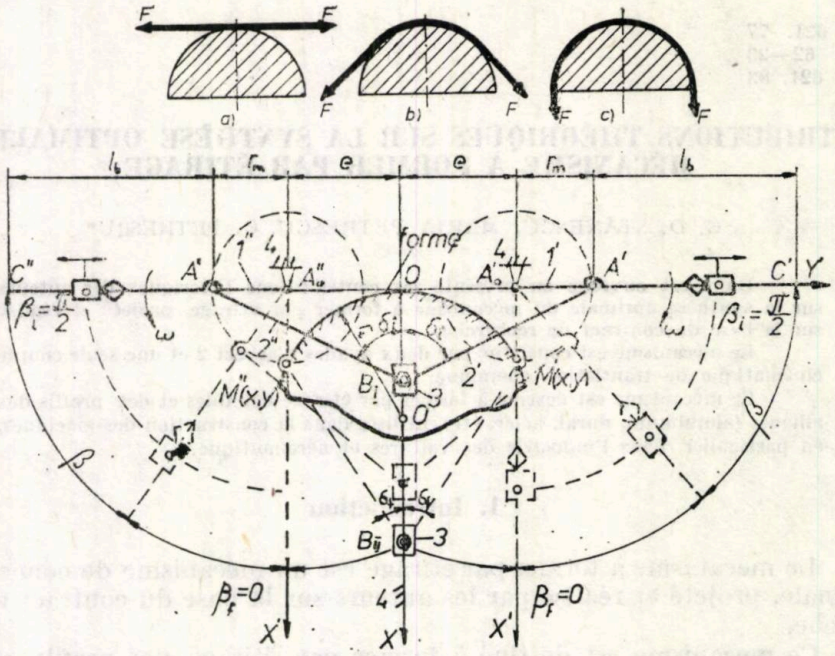


Fig. 1 a — Schéma du formage par étirage
b — Schéma cinématique du mécanisme

Pour les pièces de forme simple on utilise souvent le bois partiellement armé ou non ; on prend du hêtre ou de l'acajou qui ont un bas coefficient de frottement.

Le graissage de la surface du poinçon est en général nécessaire (huiles légères ou solubles).

Pour les matrices en bois il n'est pas recommandé d'utiliser de l'huile en solution dans l'eau par suite du risque de gauchissement de l'outil on devra de préférence employer de la vaseline.

Il convient d'éviter un graissage excessif sur certaines pièces, car l'on risque de s'exposer à la formation de poches dues à l'emprisonnement local du lubrifiant.

3. Structure du mécanisme

Le mécanisme à former par étirage (fig. 2) est constitué par : un bâti (1), deux bras pivotants (2′), (2″), deux bielles (3′), (3″), une coulisse de translation (4), deux vérins hydrauliques (5′), (5″), destinés à tendre la tôle supportés par les bras pivotants qui assurent l'enveloppement, un vérin hydraulique de traction (6) et une forme (7).

Donc, dans la structure du mécanisme à former par étirage (fig. 2) on remarque deux dyades d'aspect 2 ($A_0'A'B$) et ($A_0''A''B''$), ayant une couple cinématique de translation commune (4).

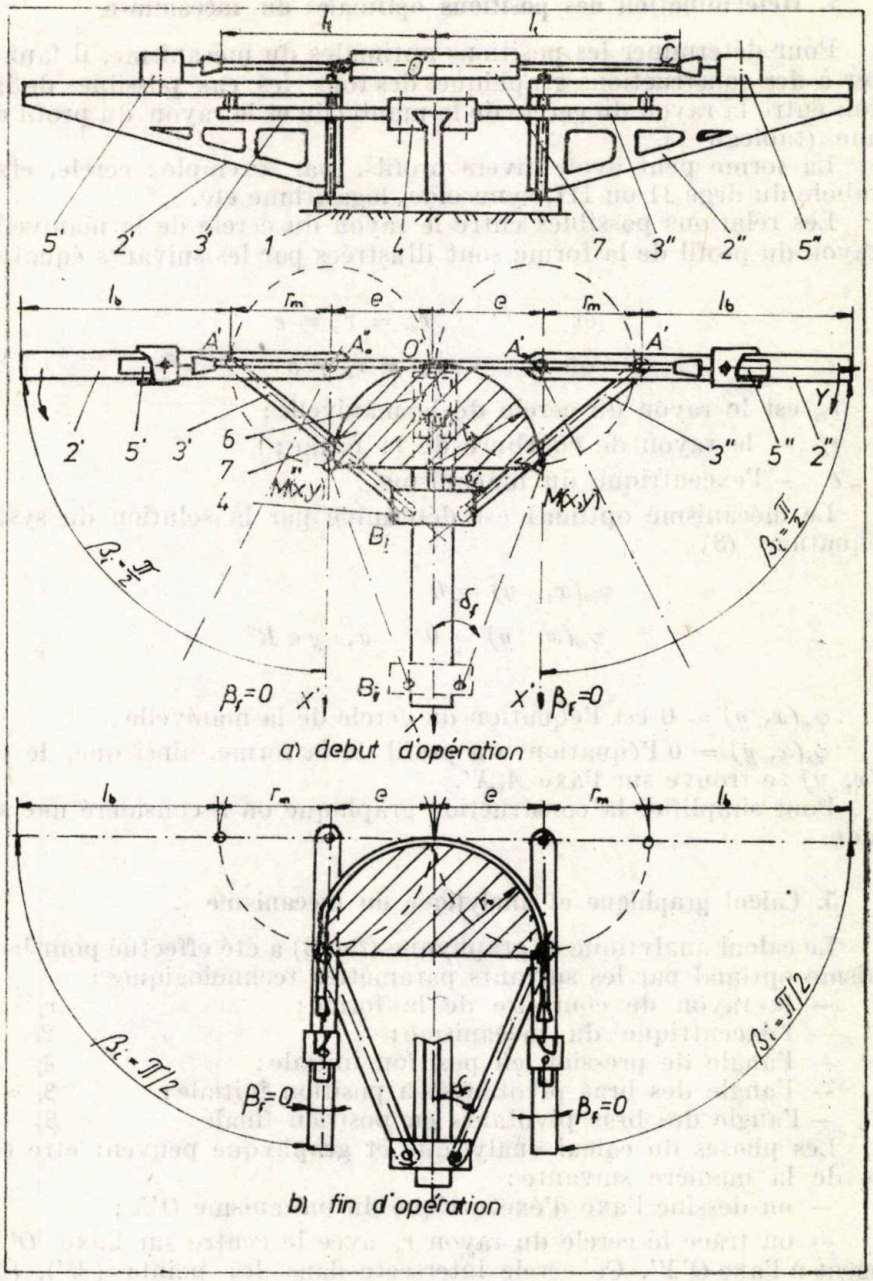


Fig. 2. — Schéma de la machine

Le tout ensemble sous forme des deux mécanismes bielle-manivelle excentrique est monté sur le bâti (1) symetrique par rapport à l'axe de la couple cinématique de translation.

4. Détermination des positions optimales du mécanimse

Pour déterminer les positions optimales du mécanisme, il faut procéder à des constructions graphiques des tous les cas possibles de la relation entre la rayon du cercle de la manivelle et le rayon du profil de la forme (tableau 1).

La forme peut avoir divers profils, par exemple : cercle, ellipse, parabole du degé II ou III, synusoide, logarithme etc.

Les relations possibles entre le rayon du cercle de la manivelle et le rayon du profil de la forme sont illustrées par les suivants équations :

$$\text{et} \qquad r_m = r_s = e \tag{1}$$

$$\text{où} \qquad r_m \neq r_s \neq e \tag{2}$$

r_m est le rayon du cercle de la manivelle;

r_s — le rayon de courbure de la forme;

e — l'excentrique du mécanisme.

Le mécanisme optimal est déterminé par la solution du système d'équations (3)

$$\begin{aligned} &\varphi_m(x, y) = 0 \\ &\varphi_m(x, y) = 0 \qquad x, y \in R^2 \end{aligned} \tag{3}$$

où

$\varphi_m(x, y) = 0$ est l'équation du cercle de la manivelle;

$\varphi_s(x, y) = 0$ l'équation du profil de la forme, ainsi que, le point $M(x, y)$ se trouve sur l'axe A_0X'.

Pour simplifier la construction graphique on a considéré une seule dyade.

5. Calcul graphique et analytique du mécanisme

Le calcul analytique et graphyque (fig. 3) a été effectué pour le mécanisme optimal par les suivants paramètres technologiques :

— le rayon de courbure de la forme; r_s

— l'éxcentrique du mécanisme; $2e$

— l'angle de pression en position initiale; δ_i

— l'angle des bras pivotants en position initiale; $\beta_i = \pi/2$

— l'angle des bras pivotants en position finale $\beta_f = 0$

Les phases du calcul analytique et graphyque peuvent être realisées de la manière suivante :

— on dessine l'axe d'éxcentrique du mécanisme $O'X$;

— on trace le cercle du rayon r_s avec le centre sur l'axe $O'X$ et tangent à l'axe $O'Y'$. Ce cercle intersecte dans les points (M'), (M''), les lignes $(A_0'X')$, $(A_0''X')$ qui marquent la position finale des bras pivotants $(\beta_f = 0)$; ainsi, on a déterminé la longueur du rayon r_m des manivelles $(A_0'M')$, $(A_0''M'')$;

— on trace les cercles avec le centre en $A_0'(A_0'')$ et le rayon r_m; ces cercles intersectent l'axe $O'Y'$ dans les points $A'(A'')$.

Tableau 1

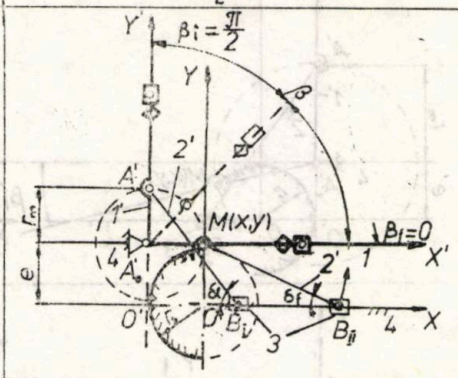
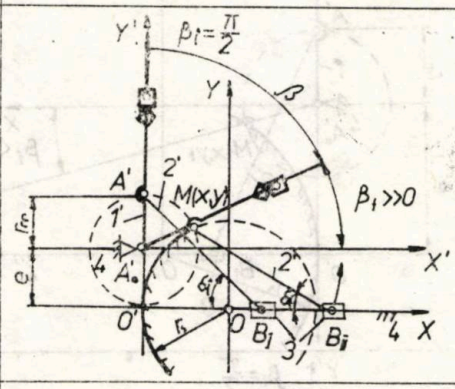
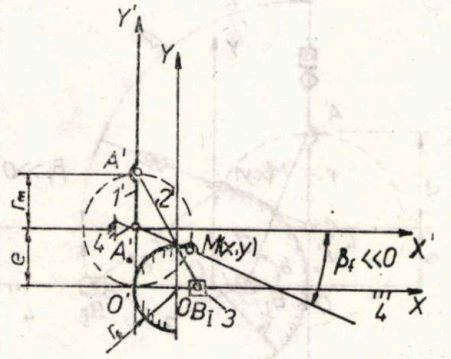
No	Rapport entre les rayons de la manivelle et de la forme	Schema cinematique du mecanisme	Conclusions
0	1	2	3
1	$r_m = r_s = e$		Possible mécanisme optimal $\beta_f = 0$
2	$r_m = e$ $r > e$ $(r_s > r_m)$		Possible formage in complet $\beta_f \gg 0$
3	$r_m = e$ $r_s < e$ $(r_s < r_m)$		Impossible $\beta_f \ll 0$

Tableau 1 (suivant)

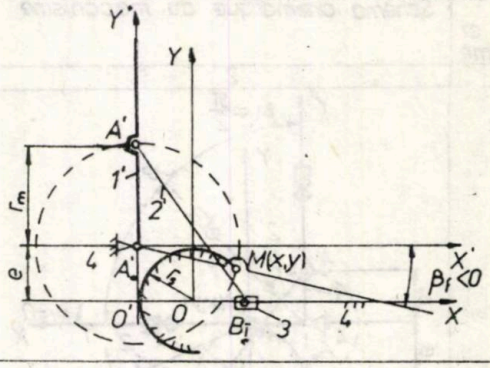
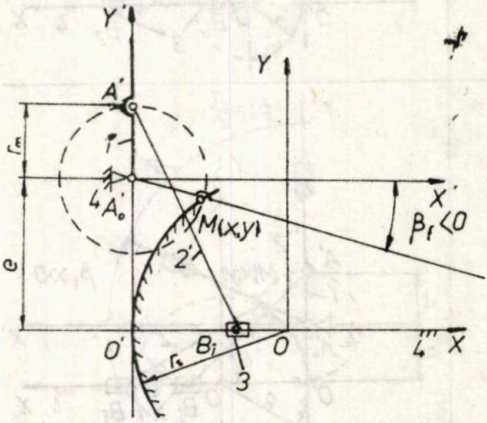
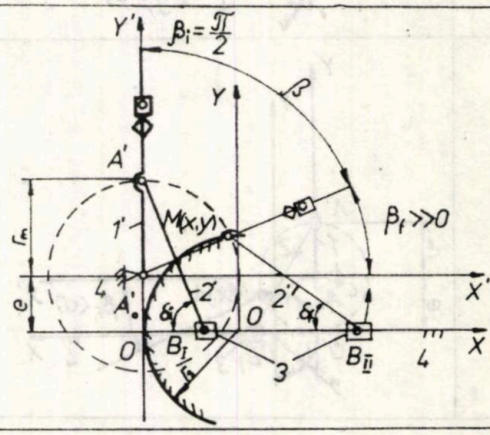
0	1	2	3
4	$r_s = e$ $r_m > e$ $(r_m > r_s)$		Impossible $\beta_f < 0$
5	$r = e$ $r_m < e$ $(r_m < r_s)$		Impossible $\beta_f < 0$
6	$r_m > e$ $r_s > e$ $(r_m = r_s > e)$		Possible formage incomplet $\beta_f >> 0$

Tableau 1 (suivant)

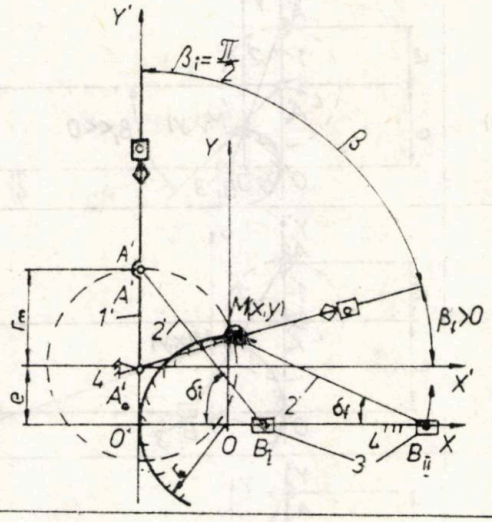
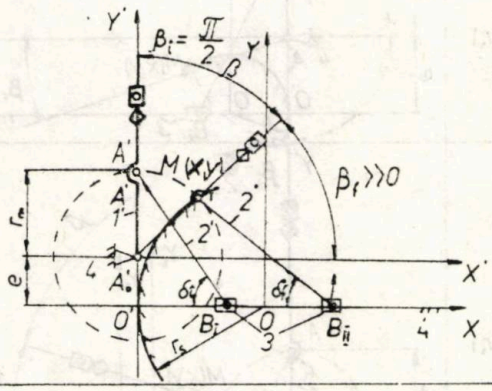
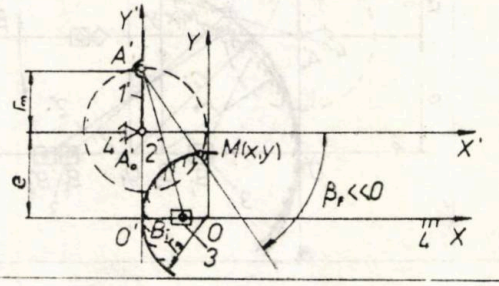
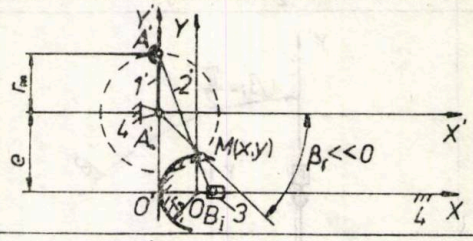
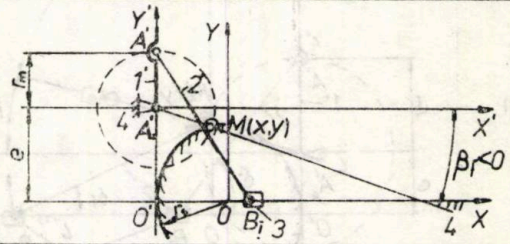
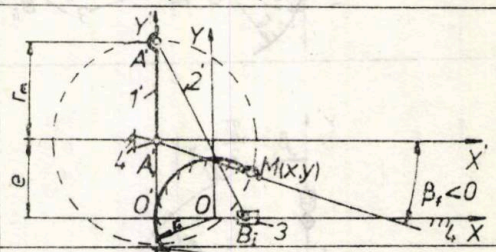
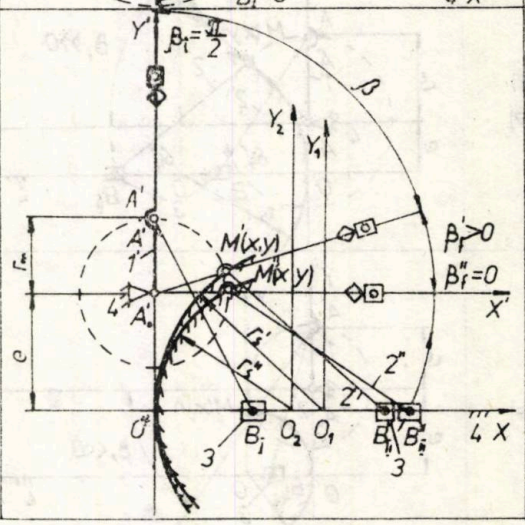
0	1	2	3
7	$r_m > e$ $r_s > e$ $(r_m \neq r_s > e)$ $(r_m > r_s > e)$		Possible formage démodé $\beta_f > 0$
8	$r_m > e$ $r_s > e$ $(r_m \neq r_s > e)$ $(r_m < r_s > e)$		Possible formage incomplet $\beta_f >> 0$
9	$r_m < e$ $r_s < e$ $(r_m = r_s < e)$		Impossible $\beta_f << 0$

Tableau 1 (suivant)

0	1	2	3
10	$r_m < e$ $r_s < e$ $(r_m \neq r_s < e)$ $(r_m > r_s)$		*Impossible* $\beta_f << 0$
11	$r_m < e$ $r_s < e$ $(r_m \neq r_s < e)$ $(r_m < r_s)$		*Impossible* $\beta_f < 0$
12	$r_m > e$ $r_s < e$ $(r_m > e > r_s)$ $(r_m > r_s)$		*Impossible* $\beta_f < 0$
13	$r_m < e$ $r_s > e$ $(r_m < e < r_s)$ $(r_m < r_s)$		*Double possibilité* *1)* $\beta_f' > 0$ *formage incomplet* *2)* $\beta_f'' = 0$ *mécanisme optimal*

la longueur des bielles (3'), (3'') est déterminé par la relation (1) du triangle $(O'A'_0B_I)$

$$\overline{A'B_I} = \frac{\overline{O'A'_0}}{\sin \delta_i} = \frac{e + r_m}{\sin \delta_i} \tag{4}$$

où

$$O'A'_0 = O'A' + A'_0A' = e + r_m \tag{5}$$

Ainsi, on détermine la position initiale (B_I) de la coulisse de translation (4).

La position finale (B_{II}) de la coulisse de translation (4) est déterminé par le tracage sur l'axe $O'X$ des cercles avec les centres en M'(M'') et le rayon $(A'B_I)$.

Les longueurs des bras pivotants (A'_0C'), (A''_0C'') sont déterminées par l'intersection avec l'axe $O'X'$ des cercles avec le centre en $A'_0(A''_0)$ et le rayon (A'_0B_{II}), (A''_0B_{II}).

Enfin, il faut faire la vérification de l'angle de pression avec les relations (6) et (7).

$$\delta_{i\max} = 45° \tag{6}$$

$$\delta_{f\max} = 30° \tag{7}$$

La longueur de la tôle l_t on détermine par la relation (8).

$$l_t = 2\int_0^c \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\, dx \tag{8}$$

où

$\varphi_{(x)}$ est la fonction du profil de la forme qui peut être cercle, ellipse parabole etc.

6. Conclusions

Parmi toutes les solutions présentées dans cet ouvrage, il y a deux mécanismes optimaux ayant $\beta_f = 0$(1 et 13).

Les mécanismes (2, 6, 7 et 8) ont $\beta_f > 0$ et on les recommande pour les solutions technologiques particulières.

Les autres mécanismes ont $\beta_f < 0$ et ils sont impossibles.

Pour éviter le blocage du mécanisme, on recommande faire le calcul de la vérification de l'angle de pression.

Le mécanisme à former par étirage projété par les auteurs a les suivants avantages :

— la simplicité et la rapidité d'exécution de l'outillage qui se réduit à un seul outil ;

— la précision des tôles embouties ;

— la possibilité d'utiliser de la main-d'oeuvre courante.

BIBLIOGRAPHIE

1. *C. D. Stănescu, Gh. Boncoi,* Contributions to the Analytical Optimal Synthesis of Cams Mechanisms Disck Cam Follower oscilatory Are Employed With Automatised Machine Tools Which Use the Electronic Computer Hewlett-Packard, Proceedings of the Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Montreal,, Canada, 1979, vol. 2, pp. 1287.
2. *C. D. Stănescu, C. Dragușin. C. Radu,* Synthèse optimale du mécanisme à former par étirage des profilés FOURTH IFTOMM INTERNATIONAL SYMPOSIUM on LINKAGES and COMPUTER AIDED DESIGN METHODS (Theory and Practice of Mechanisms). Bucharest, 1985, vol. III, Paper 112.
3. *C. D. Stănescu,* La synthèse du mécanismes à cames disques utilisées dans la construction des machines — outils automatisques employend le calculateur. Second IFToM INTERNATIONAL SYMPOSIUM on LINKAGES and COMPUTER AIDED DESIGN METHODS, SYROM'77, Bucharest, 1977, vol. III-2, Paper 51, p. 605.
4. *C. D. Stănescu, Gh. Boncoi,* Contribution to the Technological synthesis of cams Mechanisms Disck used with Automatised Machine Tools Which use the Electronic Computer Howlett,-Packard, Proceedings of the Fitfh World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Montreal, Canada, 1979, vol. 2, pp. 1291.
5. *C. Stănescu, Gh. Boncoi,* La comparaison des lois de mouvement des mécanismes à cames disques pour les machines-outils par rapport du critère de la vitèsse angulaire maximum du taquet THIRD IFToMM INTERNATIONAL SYMPOSIUM on LINKAGES and COMPUTER AIDED DESIGN METHODS (THEORY and PRACTICS OF MECHANISMS), Bucharest, 1981, vol. III, Paper 42, pp. 369—378.
6. *C. D. Stănescu, Gh. Boncoi,* Contributions a l'étude de la synthèse optimale des mécanismes à cames disques avec taquet oscillant utilisées aux machines-outils automatiques, Secod IFToMM INTERNATIONAL SYMPOSIUM on LINKAGES and COMPUTER AIDED DESIGN METHODS, SYROM'77, Bucharest, 1977, vol. III-2 Paper 50, pp. 593.
7. *C. D. Stănescu,* Construcția de mașini nr. 11, 1977, p. 540.
8. *C. D. Stănescu* Studiu asupra proiectării și tehnologiei de prelucrare a camelor de la strungurile automate de fabricație românească, Lucrurile sesiunii științifice IPB, 1974 p. 265.
9. *C. D. Stănescu, Gh. Boncoi,* — Critères d'optimisation des méthodes de synthèse géometrique des mécanismes à cames disques utilisées aux machines-outils automatiques, AII-a Conferință Națională de Mașini-Uneite, IPB, București, 1976, vol. 5 p. 54.
10. *C. D. Stănescu,* Considerații teoretice și tehnologice asupra cinemeticii mecanismelor cu came disc utilizate la strungurile automate monoax, utile pentru proiectare (I), Fiabilitatea în construcția de mașini, Institutul Politehnic Iași, 1975, p. 201.
11. *C. D. Stănescu,* Buletinul științific IPB 1976, p. 186.
12. *C. D. Stănescu,* — Studiu asupra proiectării mecanismelor cu camă disc utilizate la mașini unelte automate Comunicările celei de-a II-a sesiuni tehnico științifice organizată cu prilejul zilei constructorilor de mașini din RSR, Brăila, 1976, p. 286.
13. *C. D. Stănescu, GH. Boncoi,* Contribuții privind proiectarea optimă a mecanismelor cu camă disc cu tacnet lniar utilizate la mașini unelte automate, folosnd calculatorul electronic cu ploter, Lucrările Conferinței Tehnologii noi de fabricație în construcția de mașini, Univ. Galați, Fac. Mecanică, 1977, vol. II, p. 117.
14. *C. D. Stănescu, C. Ionescu,* Robot cu șase grade de libertate pentru multiple tehnologii, Simpozionul Național de Roboți Industriali, București, 1981, p. 366.
15. *C. D. Stănescu, M. Peterscu, C. Petrescu, A. Grigoraș,* Presă de format în trei puncte Sesiunea științifică, Univ. Craiova, Fac. Mecanică, 1983, p. 259.
16. *C. D. Stănescu, M. Petrescu, C. Petrescu, A. Grigoraș,* Mașină de format profile, A IV-a Sesiune științifică de Mecanisme și Roboți Industriali, Institutul Politehnic Timișoara, 1984, vol. II, p. 190.

Contribuţii teoretice asupra sintezei optime a mecanismului de formare prin tragere

În această lucrare se prezintă contribuţiile teoretice ale autorilor asupra sintezei optime a mecanismului de formare prin tragere realizat pe bază de contract de cercetare.

Mecanismul este constituit din două diade de aspectul 2 şi o singură cuplă cinematică de translaţie comună.

Acest mecanism este destinat formării prin tragere a tolelor şi profilelor din aliaje (aluminiu, dural, oţel etc.) utilizate în construcţia de maşini şi în special în industria de automobile şi aeronautică.

C.Z.: 531. 3: 512. 64

ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI CINEMATICE ALE RIGIDULUI CU PUNCT FIX

N. PANDREA*

În lucrare se prezintă cu ajutorul calculului matriceal unele proprietăți ale mișcării rigidului cu punct fix.

1. Introducere

În lucrările precedente [3], [4], [5] s-au studiat unele proprietăți ale mișcării rigidului cu ajutorul algebrei vectoriale sau prin teoria șuruburilor și a vectorilor duali.

Mergînd pe linia acelorași preocupări în prezenta lucrare se vor demonstra unele proprietăți ale mișcării rigidului în punct fix cu ajutorul calculului matriceal.

2. Rotația finită a rigidului cu punct fix

Se consideră două poziții ale unui rigid cu punct fix. Sistemul de referință solidar legat de rigid, în cele două poziții se notează prin $O_0x_0y_0z_0$ și $O_0x_1y_1z_1$ iar versorii acestor axe prin $\bar{i}_0$, $\bar{j}_0$, $\bar{k}_0$ respectiv $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ (fig. 1).

Matricea de rotație $[R]$ care transformă sistemul $O_0x_0y_0z_0$ în sistemul $O_0x_1y_1z_1$ [5] se scrie,

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

unde $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ reprezintă cosinusurile directoare ale axelor O_0x_1, O_0y_1, O_0z_1, în raport cu sistemul $O_0x_0y_0z_0$.

Un vector oarecare $\bar{r}_0$ se transformă în vectorul $\bar{r}_1$ prin relația,

$$\{r_1\} = [R]\,\{r_0\} \tag{2}$$

unde prin $\{r_1\}$, $\{r_0\}$ s-au notat vectorii coloană care au componentele egale cu proiecțiile vectorilor $\bar{r}_1$, $\bar{r}_0$ pe axele sistemului $O_0x_0y_0z_0$.

Scriind relația (2) sub forma,

$$\{r_0\} = [R]^{-1}\{r_1\} \tag{3}$$

* Conf. dr. ing., Institutul de subingineri Pitești

și căutînd axa de rotație caracterizată de vectorul $\bar{r}_0$ pentru care,

$$[R]\{r_0\} = \{r_0\} \tag{4}$$

prin scăderea relației (4) din (3) se obține expresia,

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 - \beta_1 & \alpha_3 - \gamma_1 \\ \beta_1 - \alpha_2 & 0 & \beta_3 - \gamma_2 \\ \gamma_1 - \gamma_3 & \gamma_2 - \beta_3 & 0 \end{bmatrix} \{r_0\} = 0 \tag{5}$$

care este echivalentă cu produsul vectorial:

$$[(\gamma_2 - \beta_3)\bar{i}_0 + (\alpha_3 - \gamma_1)\bar{j}_0 - (\beta_1 - \alpha_2)\bar{k}_0] \times \bar{r}_0 = 0 \tag{6}$$

Notînd,

$$\bar{W} = \frac{1}{2}[(\gamma_2 - \beta_3)\bar{i}_0 + (\alpha_3 - \gamma_1)\bar{j}_0 + (\beta_1 - \alpha_2)k_0] \tag{7}$$

rezultă că vectorul $\bar{W}$ constituie o soluție a ecuației (5).

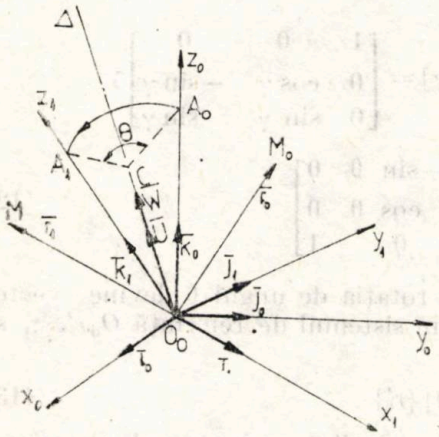


Fig. 1

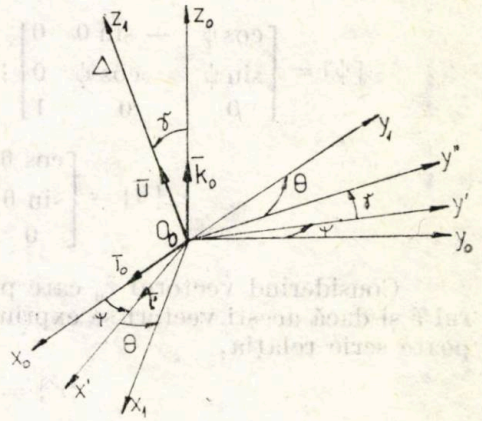


Fig. 2

Axa de rotație Δ, (fig. 1 este definită de vectorul $\bar{W}$ care se poate exprima cu ajutorul versorului $\bar{u}$[5] prin relația,

$$\bar{W} = \bar{u} \sin \theta \tag{8}$$

θ fiind unghiul de rotație.

3. Determinarea matricei de rotație cînd se cunoaște axa de rotație Δ și unghiul de rotație θ. Relația lui Rodrigues.

Fie (a, b, c) cosinusurile directoare ale axei Δ și fie O_0x' dreapta de intersecție dintre planul $O_0x_0y_0z_0$ și planul ce trece prin O_0 și este perpendicular pe axa Δ(fig. 2).

Dacă notăm cu γ și ψ unghiurile dintre axele Δ și O_0z_0 respectiv dintre O_0x' și O_0x_0, rezultă că versorii axelor Δ și O_0x' se pot scrie,

$$\bar{i}' = \cos\psi\bar{i}_0 + \sin\psi\bar{j}_0 \tag{9}$$

$$\bar{u} = \sin\gamma\sin\psi\bar{i}_0 - \sin\gamma\cos\psi\bar{j}_0 + \cos\gamma\bar{k}_0 \tag{10}$$

și deci cosinusurile directoare ale axei de rotație Δ se pot exprima cu ajutorul unghiurilor ψ, γ prin relațiile,

$$a = \sin\gamma\sin\psi\,;\quad b = -\sin\gamma\cos\psi\,;\qquad c = \cos\gamma \tag{11}$$

Prin rotația de unghi θ și axă Δ, axa O_0x' ajunge în poziția O_0x_1 și astfel, se poate considera că pentru a se ajunge din poziția $O_0x_0y_0z_0$ în poziția $O_0x_1y_1z_1$ s-au efectuat următoarele rotații:

$O_0x_0y_0z_0 \to O_0z_0x'y'$ (rotație în jurul axei O_0z_0 de unghiul ψ);

$O_0z_0x'y' \to O_0z_1x'y''$ (rotație în jurul axei O_0x' de unghi γ);

$O_0z_1x'y'' \to O_0x_1y_1z_1$ (rotație în jurul axei O_0z_1 de unghi θ).

Matricele de rotație ce corespund acestor transformări sînt date de relațiile:

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad [\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \sin\gamma \end{bmatrix};$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Considerînd vectorul $\bar{r}_0$ care prin rotația de unghi θ devine vectorul $\bar{r}$ și dacă acești vectori se exprimă în sistemul de referință $O_0x'x'z_1$ se poate scrie relația,

$$\{r'\} = [\theta]\{r'_0\} \tag{13}$$

În sistemul de referință $O_0x_0y_0z_0$ vectorii r_0, r în notație matricea-lă $\{r_0\}$, $\{r\}$ se exprimă prin relațiile.

$$\{r\} = [\psi][\gamma]\{r'\};\qquad \{r_0\} = [\psi][\gamma]\{r'_0\} \tag{14}$$

și din relația (13) rezultă,

$$\{r\} = [\psi][\gamma][\theta][\gamma]^{-1}[\psi]^{-1}\{r_0\} \tag{15}$$

și deci, matricea de rotație este:

$$[R] = [\psi][\gamma][\theta][\gamma]^{-1}[\psi]^{-1} \tag{16}$$

Ținînd seama de faptul că matricea $[\theta]$ se poate scrie sub forma,

$$[\theta] = (\cos\theta = 1)\,[\tilde{\theta}] + \sin\theta[\tilde{\tilde{\theta}}] + [I]$$

unde,

$$[\tilde{\theta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\tilde{\tilde{\theta}}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

rezultă,

$$[R] = (\cos\theta - 1)[\psi][\gamma][\tilde{\theta}][\gamma]^{-1}[\psi]^{-1} + \sin\theta[\psi][\gamma][\tilde{\tilde{\theta}}][\theta]^{-1}[\psi]^{-1} + [I] \tag{18}$$

Prin efectuarea produselor de matrice, ținînd seama de relațiile (11) și de notația,

$$[U] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

se obține matricea de rotație de la sistemul $o_0x_0y_0z_0$ la sistemul $o_0x_1y_1z_1$,

$$[R] = [I] + \sin\theta\,[U] + (1 - \cos\theta)\,[U]^2 \tag{20}$$

sau,

$$[R] = \cos\theta[I] + \sin\theta\,[U] + (1 = \cos\theta)\,[V] \tag{21}$$

unde,

$$[V] = [U]^2 - [I] \tag{22}$$

Relația de transformare,

$$\{r\} = [R]\{r_0\} \tag{23}$$

ținînd seama de expresia (20), se scrie,

$$\{r\} = \{r_0\} + \sin\theta[U]\{r_0\} + (1 - \cos\theta)[U]^2\{r_0\} \tag{24}$$

și de aici se obține relația vectorială,

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \sin\theta(\bar{u} \times \bar{r}_0) + (1 - \cos\theta)\bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{r}_0) \tag{25}$$

care reprezintă tocmai relația lui Rodrigues.

2. Compunerea rotațiilor

Să considerăm rotațiile succesive prin care sistemul de referință $o_0x_0y_0z_0$ ajunge în $o_0x_1y_1z_1$ și apoi sistemul $o_0x_1y_1z_1$ ajunge în $o_0x_2y_2z_2$ prin transformările $[R_1]$, $[R_2]$.

Dacă $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ sînt versorii axelor de rotație Δ_1, Δ_2 avînd cosinusurile directoare (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2\, c_2)$, iar θ_1, θ_2 sînt unghiurile de rotație, atunci ținînd seama de relațiile (19), (21) matricele de rotație se scriu,

$$[R_1] = \cos\theta_1\,[I] + \sin\theta_1\,[U_1] + (1 - \cos\theta_1)[V_1] \tag{26}$$

$$[R_2] = \cos\theta_2\,[I] + \sin\theta_2\,[U_2] + (1 - \cos\theta_2)\,[V_2] \tag{27}$$

unde,

$$[U_1] = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 & b_1 \\ c_1 & 0 & -a_1 \\ -b_1 & a_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad [U_2] = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 & b_2 \\ c_2 & 0 & -a_2 \\ -b_2 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$V_1] = [U_1]^2 - [I]; \quad [V_2] = [U_2]^2 - [I] \tag{29}$$

Considerînd că vectorul $\bar{r}_0$ după prima rotație devine $\bar{r}_1$ iar acesta prin a doua rotație devine $\bar{r}_2$, exprimînd toate componentele în sistemul de referință $o_0x_0y_0z_0$ rezultă,

$$\{r_1\} = [R_1]\{r_0\}; \quad \{r_2\} = [R_2]\{r_1\}$$

de unde,

$$\{r_2\} = [R_2][R_1]\{r_0\} \tag{30}$$

Se obține matricea pentru rotația compusă:

$$[R_3] = [R_2][R_1] \tag{31}$$

Rotația rezultantă se caracterizează printr-o axă de rotație Δ_3 și un unghi de rotație θ_3.

Pentru determinarea acestora este necesar a calcula vectorul $\bar{W}_3$ definit de relația (7) pentru matricea $[R_3]$.

Matricea $[R_3]$ se scrie,

$$[R_3] = \cos\theta_1 \cos\theta_2 [I] + \sin\theta_1 \cos\theta_2 [U_1] + \sin\theta_2 \cos\theta_1 [U_2] +$$
$$+ (1-\cos\theta_1)\cos\theta_2[V_1] + (1-\cos\theta_2)\cos\theta_1 [V_2] + \sin\theta_1 \sin\theta_2 [U_2][U_1] +$$
$$+ \sin\theta_2(1-\cos\theta_1)[U_2][V_1] + \sin\theta_1(1-\cos\theta_2)[V_2][U_1] +$$
$$+ (1-\cos\theta_1)(1-\cos\theta_2)[V_2][V_1] \tag{32}$$

Vectorul $\bar{W}_3$ al matricei $[R_3]$ se poate exprima ca o sumă ce rezultă din aplicarea relației (7) pentru fiecare matrice din relația (31) în parte.

Se obține,

$$\bar{W}([I]) = 0; \quad \bar{w}_3([U_1]) = \bar{u}_1 \quad ; \quad \bar{W}_3([U_2]) = \bar{u}_2$$

$$\bar{W}_3([V_1]) = \bar{w}_3([V_2]) = 0 \quad ; \quad \bar{W}_3([U_2][U_1]) = -\frac{1}{2}\bar{u}^1 \times \bar{u}_2$$

$$\bar{W}_3([U_2)][V_1]) = -\frac{1}{2}\bar{u}_1 \times (\bar{u}_1 \times \bar{u}_2); \quad \bar{W}_3(V_2U_1) = -\frac{1}{2}\bar{u}_2 \times (\bar{u}_2 \times \bar{u}_1)$$

$$\bar{W}_3([V_2][V_1]) = \frac{1}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2(\bar{u}_1 \times \bar{u}_2)$$

și rezultă

$$\bar{W}_3 = 2A\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\bar{u}_1 + \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\bar{u}_2 - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\bar{u}_1 \times \bar{u}_2\right)$$

unde,

$$A = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2 \tag{34}$$

Potrivit cu relația (8) exprimînd vectorul $\bar{W}_3$ sub forma :

$$\bar{W}_3 = \bar{u}_3 \sin\theta_3 \tag{35}$$

din relațiile (33), (34), (35) rezultă :

$$\cos\frac{\theta_3}{2} = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2 \tag{36}$$

Notînd cu $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, $\bar{\theta}_3$ vectorii,

$$\bar{\theta}_1 = \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\bar{u}_1\,; \quad \theta_2 = \operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}\bar{u}_2\,; \quad \theta_3 = \operatorname{tg}\frac{\theta_3}{3}\bar{u}_3 \tag{37}$$

din relațiile (33), (34), (35), (36), (37) se obține relația :

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_1 \times \bar{\theta}_2}{1 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2} \tag{38}$$

care reprezintă regula de compunere a rotațiilor finite concurente.

Trebuie făcută observația că o rotație de axă Δ se poate caracteriza prin versorul $\bar{u}$ și unghiul de rotație θ respectiv prin vectorul $\bar{\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\bar{u}$, dar că acest vector nu definește în totalitate rotația, compunerea rotațiilor (38) neefectuîndu-se după regula de compunere a vectorilor.

Așadar, mărimile fizice caracterizate de direcție, sens și intensitate sînt mărimi vectoriale numai dacă se compun după regula paralelogramului.

Rotațiile infinitezimale sînt mărimi vectoriale deoarece, în acest caz produse $\bar{\theta}_1 \times \bar{\theta}_2$, $\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2$ devin neglijabile și din relația (38) rezultă

$$\bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 \tag{39}$$

Revenind la rotațiile finite, dacă se consideră două rotații succesive de unghi π în jurul a două drepte Δ_1, Δ_2 concurente cu dreapta Δ și perpendiculare pe aceasta, între dreptele Δ_1, Δ_2 fiind unghiul $\frac{\theta}{2}$ (fig.3), alegînd dreapta Δ ca axă o_0z_0 iar axa Δ_1 drept axă o_0x_0, aplicînd relația (20) se obține,

$$[R_1] = [I] + 2[U_1]^2, \quad [R_2] = [I] + 2[U_2]^2 \tag{40}$$

unde,

$$\bar{u}_1 = \bar{i}_0 \rightarrow [U_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\bar{u}_2 = \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{i}_0 + \sin\frac{\theta}{2}\,\bar{j}_0 \rightarrow U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Calculînd rotaţia compusă se obţine matricea de rotaţie,

$$[R_3] = [R_2][R_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

care corespunde unei rotaţii de unghi θ în jurul axei Δ.

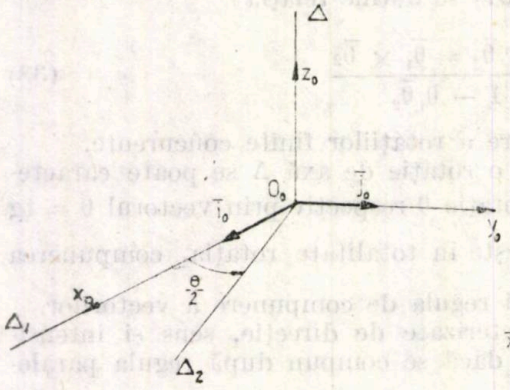


Fig. 3

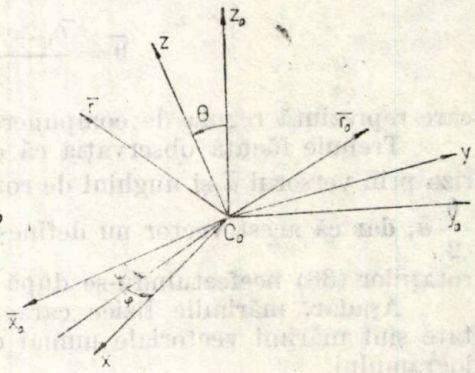


Fig. 4

Se poate enunţa deci proprietatea: o rotaţie în jurul unei drepte Δ, de unghi θ, este echivalentă cu două rotaţii succesive cu unghiurile egale cu π în jurul a două drepte Δ_1, Δ_2, concurente cu Δ şi perpendiculare pe aceasta, dreptele Δ_1, Δ_2 determinînd între ele un unghi egal cu $\frac{\theta}{2}$.

5. Determinarea vitezei unghiulare prin calcul matriceal în funcţie de unghiurile lui Euler.

Considerînd sistemul fix $o_0x_0y_0z_0$, sistemul mobil $oxyz$, (fig. 4), vectorul fix $\bar{r}_0$ şi vectorul mobil r care este solidar cu sistemul mobil, între aceşti doi vectori dacă se corespund şi dacă sînt exprimaţi în acelaşi sistem de referinţă $o_0x_0y_0z_0$, există relaţia,

$$\{r\} = [R]\,\{r_0\} \tag{44}$$

unde matricea $[R]$ cu ajutorul unghiurilor lui Euler se scrie,

$$[R] = [\psi]\,[\theta]\,[\varphi] \tag{45}$$

în care,

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta & \cos\varphi \end{bmatrix};$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Derivînd relația (44) se obține,

$$\{v\} = [\dot{R}]\,\{r_0\} \tag{47}$$

unde $\{v\}$ reprezintă vectorul viteză în exprimare matriceală în sistemul $o_0x_0y_0z_0$.

Din expresiile (44), (46) rezultă,

$$\{v\} = [\dot{R}]\,[R]^{-1}\{r\}$$

sau,

$$\{v\} = [\omega]\,\{r\} \tag{48}$$

unde,

$$[\omega] = [\dot{R}]\,[R]^{-1} \tag{49}$$

reprezintă matricea viteză unghiulară.

Utilizînd unghiurile lui Euler, relația (49) se scrie,

$$[\omega] = [\dot{\psi}]\,[\theta]\,[\varphi]\,[\varphi]^{-1}[\theta]^{-1}[\psi]^{-1} = [\psi][\dot{\theta}]\,[\varphi]\,[\varphi]^{-1}[\theta]^{-1}[\varphi] + \\ + [\psi][\theta][\dot{\varphi}][\varphi]^{-1}[\theta]^{-1}[\varphi] \tag{50}$$

Efectuînd calculele se obține matricea viteză unghiulară,

$$[\omega] = \\ = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}\cos\theta - & \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta & 0 & \dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi & \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

pentru care corespunde vectorul $\bar{\omega}$ avînd componentele în sistemul $o_0x_0y_0z_0$;

$$\begin{aligned} \omega_{x0} &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_{y0} &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_{z0} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned} \tag{52}$$

În exprimare vectorială relația (48) devine:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Dacă relația (47) se exprimă în sistemul de referință $o_0x_0y_0z_0$ rezultă,

$$\{v\} = [R]^{-1}[\dot{R}]\{r\} \tag{53}$$

și se obține matricea viteză unghiulară,

$$[\omega] = [R]^{-1}[\dot{R}] \tag{54}$$

pentru care prin efectuarea calculelor se obține vectorul ω ale cărui proiecții pe axele sistemului mobil o_0xyz, sînt:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos\varphi \sin - \dot{\theta} \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{55}$$

BIBLIOGRAFIE

1. *A. N. Kilcevski*, Elemente de calcul tensorial și aplicațiile lui în Mecanică, Ed. Tehnică, 1956.
2. *O. Onicescu*, Mecanica, Ed. Tehnică, București, 1969.
3. *N. Pandrea*, Buletinul I. P. București, Tom XXXIV — nr. 4, pg. 29—38, 1972.
4. *N. Pandrea, D. Voiculescu*, Rev. Roumaine des Sciences Techniques, série de Mécanique Appliquée, Tome 20, nr. 3, pp. 413—428, 1975.
5. *Chr. Pelecudi*, Teoria mecanismelor spațiale, Ed. Academiei, 1972.
6. *D. Voiculescu, N. Pandrea*, Buletinul I. P. București, Tom XXXIV — nr. 3, pg. 31—36.
7. *R. Voinea, D. Voiculescu, V. Ceauşu*, Mecanica, Ed. Did. și Ped., 1983.

Some Geometrical Properties of a Rigid Body about a Fixed Point

In the paper are presented some geometrical properties of the motion of a rigid body about a fixed point by using matrix calculus.

C.Z.: 621. 43 : 532. 5

UN STUDIU AL COEFICIENTULUI DE DEBIT PENTRU CONDIȚIILE PARTICULARE CURGERII IN PROCESELE DE SCHIMB DE GAZE LA SUPAPE

Ș. MINCULESCU*

În lucrare se prezintă o originală interpretare a coeficientului de debit, în corelație cu caracteristicile reale ale curgerii pe sub supapele motoarelor cu ardere internă „inflow" și „outflow", în perioada dintre momentul de deschidere și cel de închidere al fiecărei supape și sînt prezentate variațiile coerente ale coeficientului de debit pentru cele două supape.

Cercetarea literaturii de specialitate [2], [3], permite stabilirea unor probleme legate de procesele de admisie și evacuare — procesele de schimb de gaze — mai puțin adîncite, datorită fie unor dificultăți de corelare teoretico-experimentale, fie unor simplificări impuse de structura modelelor și metodelor de calcul elaborate. Astfel, se constată că studiul mai atent al coeficientului de debit face obiectul unei activități recente, [1], dar încă departe de a da satisfacția de precizie cerută de proiectare. Se folosesc pentru coeficientul de debit, fie valori constante, fie valori variabile, dar insuficient fundamentate, iar mersul calculelor nu ține seama încă de modificările acestuia produse de schimbarea sensului curgerii gazelor.

Calculul procesului de schimb de gaze se bazează pe valorile coeficientului de debit pentru cele două supape, de admisie și evacuare, determinate experimental, după așa-numita metodă „statică", în cadrul căreia se măsoară debitul ce traversează supapa, la diferitele ridicări ale acesteia și la diferite căderi de presiune. Pentru supapa de admisie, experimentul se face pentru debitul aspirat (inflow), iar pentru cea de evacuare pentru debitul evacuat (outflow).

Examinînd natura curgerilor la supape în cazul unui model fizico-matematic al procesului de schimb de gaze, în care se consideră coeficienții de debit constanți, [4] se pot observa inversări curente ale sensului de curgere al gazelor pe sub supape.

Coeficientul de debit pentru supapa de admisie. La începutul ridicării sale, curgerea este de regulă spre exterior (outflow), gazele arse părăsind cilindrul atît prin supapa de evacuare cît și prin supapa de admisie. De abia de la o anumită ridicare a supapei, apare curgerea caracteristică de aspirație (inflow). Prin urmare, după o perioadă mai mare sau mai mică de „outflow" și trecînd printr-un moment de oprire a curgerii, deci de debit nul, curgerea se inversează căpătînd caracterul normal pentru

* Șef lucrări dr. ing., catedra Geometrie descriptivă de desen

admisie. Din această împrejurare reiese cu pregnanță necesitatea de a stabili dacă alura de variație și valorile coeficientului de debit sînt asemănătoare în cele două faze descrise (outflow și inflow), pentru supapa de aspirație, la începutul deschiderii sale cu avans. Ori, caracterul variației coeficientului de debit în această perioadă, nu poate fi principial identic, deoarece sînt complet diferite condițiile de curgere, în funcție de sensul curgerii prin secțiunea oferită de supapă. Aceste diferențe sînt atribuite atît „geometriei" deosebite la intrarea și ieșirea din supapă, cît și căderilor de presiune.

Literatura de specialitate nu face precizări nici în legătură cu folosirea coeficientului de debit pe întreg procesul de schimb de gaze între deschiderea și închiderea supapei. (Observăm că același lucru este valabil și pentru supapa de evacuare). Modul în care se folosesc valorile coeficientului de debit pare a fi următorul: datele experimentale sînt determinate numai de la începutul deschiderii supapei pînă la atingerea deschiderii maxime, iar din acest moment se folosesc valorile precedente, parcurse în sens invers. Dacă această metodă este justificată pe cea mai mare parte a perioadei de coborîre a supapei, ea nu mai poate fi justificată în apropierea așezării ei pe sediu, deoarece aici, procesul de curgere poate fi în sensul aspirației, deci tot în „inflow", sau din contră, în refulare (outflow). Numai în cazul practic al unui singur regim funcțional și anume al aceluia pentru care întîrzierea la închiderea supapei este optimă, supapa se închide în momentul în care debitul aspirat devine nul. Din aceste considerente rezultă că în cazul fazei optime de întîrziere la închiderea supapei de admisie, valoarea finală a coeficientului de debit este practic unitară, datorită încetinirii treptate pînă la anulare a vitezei și deci a debitului aspirat.

Un alt motiv invocat este — de fapt mai bine ilustrat de supapa de evacuare — acela al diferențelor care pot fi substanțiale între căderile de presiune la supapă, între momentul deschiderii și momentul închiderii supapei (de cîțiva bari în cazul deschiderii și numai fracțiuni de bar în cazul închiderii), ceea ce desigur, afectează cuantumul pierderilor gazodinamice, cu toate că valorile secțiunilor de trecere în perioadele menționate pot fi practic identice.

În cazul în care momentul închiderii supapei de admisie apare înaintea epuizării postumplerii inerțiale, sub o cădere de presiune favorabilă, observăm că vitezele de trecere pe sub supapă sînt mai mari și este nerațional ca valoarea finală a coeficientului de debit să fie unitară. Din contră, ea este în orice caz subunitară, corespunzînd unor pierderi mai mari prin secțiunea de trecere din ce în ce mai mică, pînă la anularea acesteia, la așezarea supapei pe scaunul său. Ori, în datele din literatură în secvența urmărită, coeficientul de debit capătă valoarea unitară.

La închiderea supapei cu o întîrziere prea mare, aceasta se realizează în plin proces de refulare (outflow), exercitat de deplasarea pistonului cu viteze deja însemnate, sub o cădere de presiune sensibil mare. Din acest motiv, viteza de trecere pe sub supapă în „outflow" este inerent ridicată, ceea ce antrenează valori scăzute substanțial ale coeficientului de debit chiar pînă în momentul închiderii supapei. De asemenea și în acest caz de curgere din cilindru (outflow), valorile coeficientului de debit

oferite de literatură sînt determinate experimental în sensul intrării în cilindru (inflow).

Consecințele studiului expus sînt ilustrate după cum urmează:

(1) În figura 1 se arată variația coeficientului de debit pentru supapa de admisie, determinat prin metoda statică menționată de prof. Kastner ș. a. [1], în care este evidentă neținerea în seamă a faptului că la începutul ridicării supapei, curgerea are loc în „outflow" (se vede că în acest moment coeficientul de debit are valoarea $\mu = 1$, iar în imediata vecinătate valorile sînt foarte apropiate de 1). De asemenea, se folosesc pentru valorile lui μ de la ridicarea maximă pînă la închiderea supapei, valorile rezultate prin parcurgerea în sens invers a curbei date numai pînă la ridicarea maximă (y_{max}). Datele menționate au fost prelucrate, folosind în abscisă ridicarea adimensională: $y^* = y/y_{max}$.

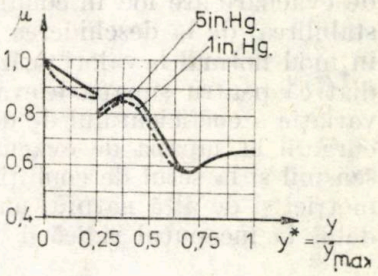


Fig. 1

(2) Confirmarea deplină a concluziilor anterioare a fost găsită în datele comunicate de prof. Nagao ș. a. [2]. Astfel, în figurile 2 și 3 se arată aceste date prelucrate, în figura 2 — variația coeficientului de debit al supapei de admisie peutru „inflow", iar în figura 3 — variația coeficientului de debit pentru aceeași supapă în „outflow", diferențele de alură și valori fiind evidente. Datele sînt prelucrate ca își în cazul precedent, prin raportarea lui μ la ridicarea adimensională y^*.

(3) În figura 4 se arată variația coerentă a coeficientului de debit, pentru situația în care închiderea supapei de admisie se realizează optim, precizînd din nou faptul că la închiderea supapei, μ tinde spre 1.

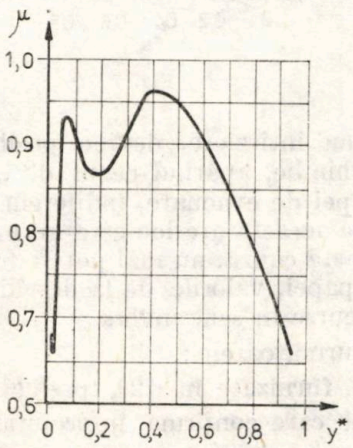


Fig. 2

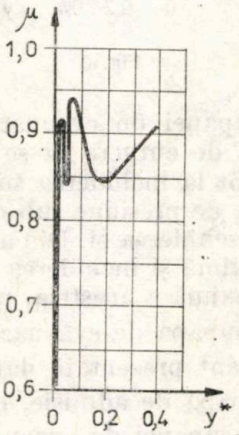


Fig. 3

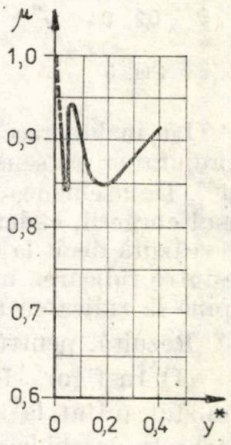


Fig. 4

(4) În cazul închiderii supapei înaintea terminării postumplerii inerțiale, deci pe „inflow", în condițiile expuse înainte, figura 5 prezintă modul coerent în care trebuie tratată problema variației lui μ.

(5) În figura 6 este arătată variația coerentă a coeficientului de debit μ, în cazul în care închiderea supapei are loc cu o întîrziere mai mare decît cea optimă, deci pe „outflow".

Coeficientul de debit pentru supapa de evacuare. Deschiderea supapei de evacuare are loc în condiții de suprapresiune înaltă, ceea ce provoacă stabilirea, de la deschiderea supapei, a unor viteze mari de curgere, deci în mod normal la valori scăzute ale coeficientului de debit. Rezultă imediat că pentru supapa de evacuare nu poate fi folosită aceeași alură de variație a coeficientului de debit ca la supapa de admisie. În plus, sensul curgerii la supapa de evacuare este categoric în „outflow", deci μ este sensibil și la setul de condiții menționat în legătură cu diferențele geometriei și de altă natură, menționate. Inerent, valorile coeficientului de debit la începutul ridicării supapei de evacuare sînt mult subunitare.

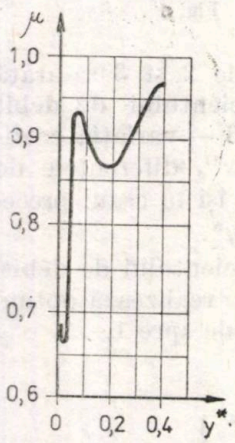


Fig. 5

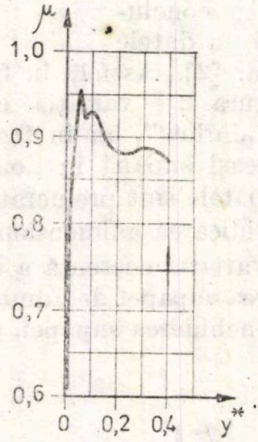


Fig. 6

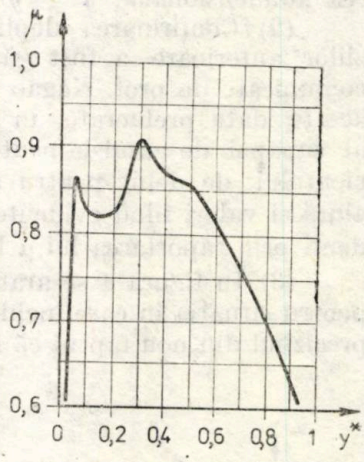


Fig. 7

La închiderea supapei de evacuare cu întîrziere, devine posibilă imprejurarea ca sensul de curgere să se schimbe, apărînd cazul de „inflow". De asemenea, tot la închiderea supapei de evacuare, indiferent de sensul curgerii, căderea de presiune sub care aceasta are loc este cu mult mai scăzută decît la deschiderea ei. Din această cauză, nu mai pot fi folosite între ridicarea maximă și închiderea supapei, valorile de la deschidere pînă la ridicarea maximă a acesteia, parcurse în sens invers.

Rezultă, pentru supapa de evacuare, următoarele:

(1) În figura 7, sînt prezentate datele furnizate în [2], prelucrate în modul arătat la supapa de admisie, date care confirmă imprejurarea arătată la deschiderea supapei de evacuare. Se observă că μ are valori substanțial reduse imediat după deschiderea supapei.

(2) În figura 8 se corectează, corespunzător observațiilor făcute anterior, zona de sfîrșit a evacuării, în condițiile în care aceasta are loc în „outflow".

(3) În figura 9 se prelucrează după [2], variația coeficientului de debit pentru supapa de evacuare, pentru cazul în care, către î.s.e. apare „inflow".

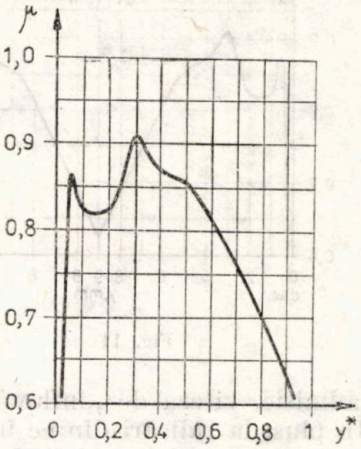


Fig. 8

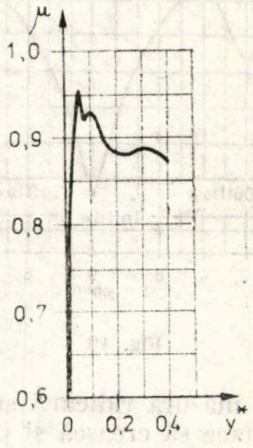


Fig. 9

Concluzii. În figurile 10 și 11 au fost trasate pentru supapa de admisie, respectiv supapa de evacuare, variațiile coerente ale coeficientului de debit, pe baza cazurilor de curgeri demonstrate de [4].

În ceea ce privește aspectul calitativ al variației coeficientului de debit — alura variației sale — sînt necesare cîteva precizări. Coeficientul de debit este în fapt un indicator al cuantumului pierderilor de energie asociată curgerii unui fluid printr-o secțiune de curgere. Ca atare, cuantumul pierderilor depinde și de natura și mărimea pierderilor locale — produse de modificarea rețelei firelor de curent și de trenele turbionare eventual generate — precum și de mărimea vitezei curentului (prin aceasta din urmă înțelegînd viteza medie, cu care se stabilește mărimea debitului). La curgerea gazelor pe sub supape s-au constatat, [1], [3], apariția cîtorva moduri de curgere, diferite între ele față de cele menționate înainte (deformarea rețelei, pierderi locale prin trene turbionare).

La deschiderea supapei sub o diferență mare de presiune, cuantumul pierderilor este ridicat din cauza vitezelor de curgere mari, dar la secțiuni mici de trecere, firele de curent sînt practic paralele între ele și au de fapt înclinarea unghiului de sediu. Din această sursă de pierderi rezultă, prin urmare, un cuantum redus de pierderi locale. Acesta este cazul deschiderii supapei de evacuare la care pierderile mari sînt datorate cu precădere valorilor ridicate ale vitezei și mai puțin pierderilor locale. Supapa de admisie se deschide sub o diferență mică de presiune, astfel încît, în comparație cu cazul precedent, pierderile datorită vitezei sînt sensibil mai reduse. În ceea ce privește pierderile locale, la începutul ridicării

supapei de admisie, acestea sînt de asemenea, reduse. Rezultă că la începutul ridicării supapei de evacuare, μ are valori mai reduse decît în cazul supapei de admisie, la începutul cursei sale (v. fig. 10 și 11).

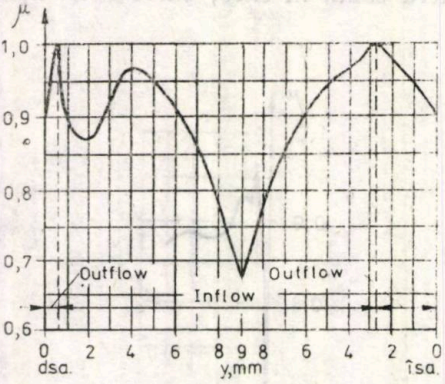


Fig. 10

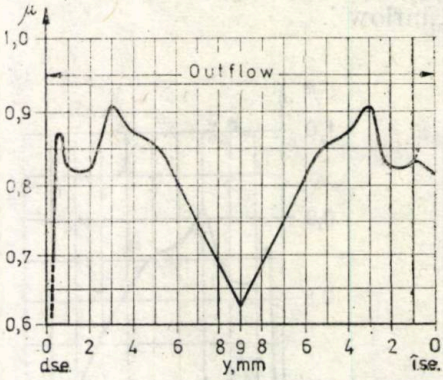


Fig. 11

Pe măsura ridicării supapei de admisie, viteza de „inflow" crește, ceea ce face să crească și pierderile. În plus, la ridicări din ce în ce mai mari ale supapei, apar trenele turbionare și neparalelismul firelor de curent între ele precum și față de înclinarea sediului (și deci alte surse de pierderi), ducînd astfel la micșorarea coeficientului de debit al supapei de admisie (v. fig. 10). Creșterea mai departe a ridicării supapei tinde, în timp, să modereze vitezele de admisie, deci să diminueze pierderile, ceea ce se traduce prin creșterea lui μ. După atingerea unui maxim, μ scade pînă la deschiderea maximă a supapei, datorită amplificării puternice a trenelor turbionare și a deformării firelor de curent,care tind treptat spre direcția axului supapei.

În perioada de coborîre a supapei de admisie, fenomenele se reproduc în sens invers, cu observația că înainte de î.s.a. se atinge — în cazul particular tratat [4] — situația de oprire a curentului (trecerea de la „inflow" la „outflow"), în acest moment valoarea μ devenind 1. Pe ultima porțiune de „outflow", coeficientul de debit încearcă diminuări, practic de alură identică cu perioada de „outflow" de la începutul ridicării supapei de admisie, din motive similare. Pentru supapa de evacuare, în perioada de coborîre a sa, μ urmează o alură de variație similară cu aceea de la supapa de admisie.

O confirmare a celor arătate precedent cu privire la fenomenele menționate în secțiunea de trecere a supapei este arătată în figura 12, întocmită după [1].

O altă grupă de precizări devine necesară în legătură cu atenția care trebuie acordată influențelor pe care viscozitatea gazelor și caracterul mișcării acestora, le pot exercita asupra coeficientului de debit.

Astfel, viscozitatea gazelor își poate manifesta influența asupra valorii lui μ, doar la temperaturi foarte înalte, creșterea viscozității gazelor odată cu temperatura, influențînd în primul rînd pierderile turbi-

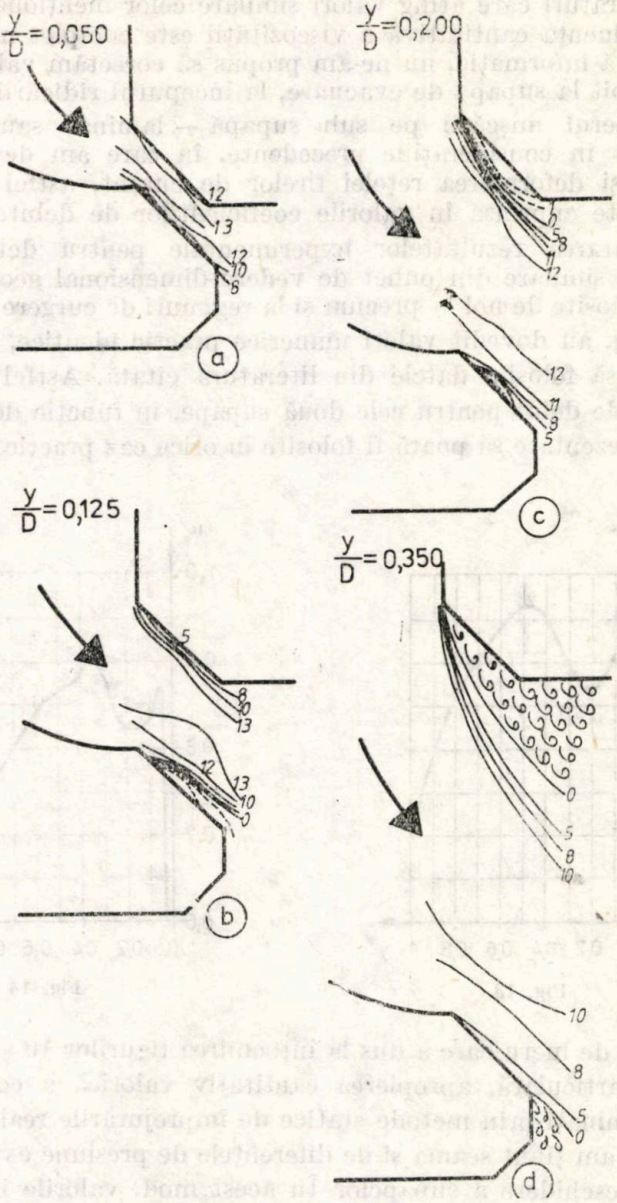


Fig. 12

onare. Rezultă că valorile coeficientului de debit pentru supapa de evacuare (v. fig. 11), la începutul ridicării acesteia — singura perioadă în care temperatura gazelor este cu mult superioară temperaturii atmosferice, ar trebui majorate corespunzător. Literatura de specialitate nu posedă nici o informație asupra dependenței menționate. Totuși, în [6], încercările

de a ţine seama de influenţele viscozităţii gazelor asupra mişcării acestora la temperaturi care ating valori similare celor menţionate, au demonstrat că influenţa cantitativă a vîscozităţii este complet neglijabilă. Preluînd această informaţie, nu ne-am propus să corectăm valorile coeficientului de debit la supapa de evacuare, la începutul ridicării sale.

Caracterul mişcării pe sub supapă — laminar sau turbulent — este cuprins în consideraţiile precedente, în care am descris pierderile turbionare, şi deformarea reţelei firelor de curent, astfel încît, această influenţă este cuprinsă în valorile coeficienţilor de debit.

Compararea rezultatelor experimentale pentru determinarea lui μ la supape similare din punct de vedere dimensional geometric — între ele şi cele folosite de noi — precum şi la regimuri de curgere asemănătoare, [1], [2], [3], au dovedit valori numerice practic identice, fapt care ne-a îndreptăţit să folosim datele din literatura citată. Astfel am prezentat coeficienţii de debit pentru cele două supape, în funcţie de y^*, în scopul ca datele prezentate să poată fi folosite în orice caz practic similar (v. fig. 13. şi 14).

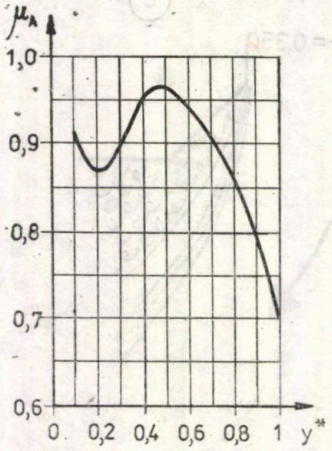


Fig. 13

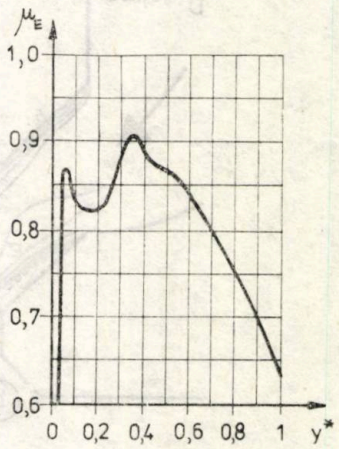


Fig. 14

Modul de lucru care a dus la întocmirea figurilor 10 şi 11, are drept trăsătură particulară, apropierea cantitativ valorică a coeficienţilor de debit determinaţi prin metode statice de împrejurările reale, faptul că în trasarea lor am ţinut seama şi de diferenţele de presiune existente în perioadele de deschidere a supapelor. În acest mod, valorile instantanee ale lui μ sînt apreciate cantitativ şi prin ţinerea în seamă a acestor diferenţe, considerînd că prin acest mod de lucru se ajunge la valori instantanee ale coeficientului de debit cît mai aproape de cele reale.

Au fost efectuate rulări ale programului de calcul prezentat în [4] pentru gama de turaţii $n = 2\,000 \ldots 5\,000$ rot/min, completînd subrutina care calculează secţiunea reală oferită de cele două supape prin co-

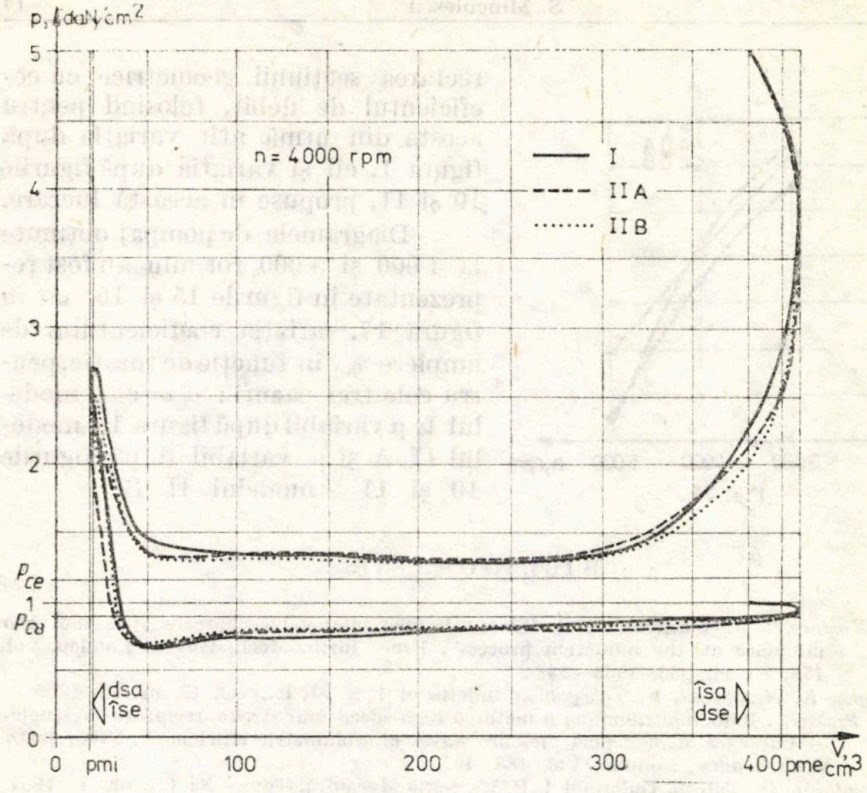

p, daN/cm²
n = 4000 rpm
I
II A
II B
p_{ce}
p_{ca}
dsa
îse
îsa
dse
pmi
pme
V, cm³

Fig. 15

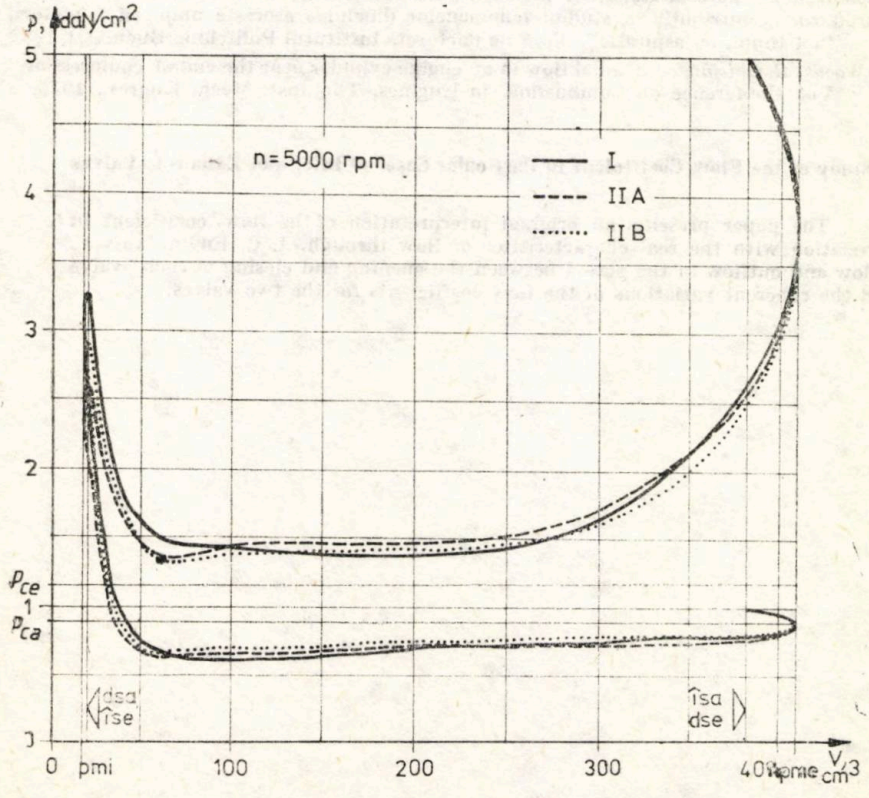

p, daN/cm²
n = 5000 rpm
I
II A
II B
p_{ce}
p_{ca}
dsa
îse
îsa
dse
pmi
pme
V, cm³

Fig. 16

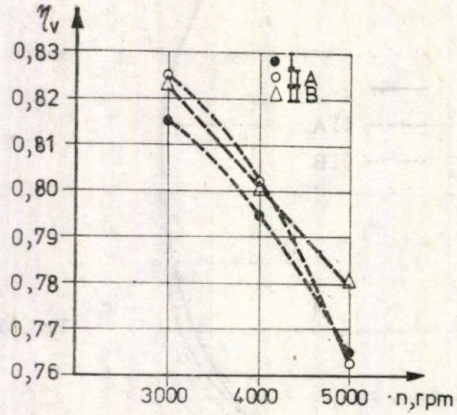


Fig. 17

rectarea secțiunii geometrice cu coeficientul de debit, folosind pentru acesta din urmă atît variația după figura 1, cît și variația după figurile 10 și 11, propuse în această lucrare.

Diagramele de pompaj obținute la 4 000 și 5 000 rot/min au fost reprezentate în figurile 15 și 16, iar în figura 17, variația coeficientului de umplere η_v, în funcție de turație, pentru cele trei cazuri : μ = ct - modelul I, μ variabil după figura 1 — modelul II A și μ variabil după figurile 10 și 11 — modelul II B.

BIBLIOGRAFIE

1. *L. J. Kastner, I. J. Williams, J. B. White*, „Poppet inlet valve characteristics and their influence on the induction process", Proc. Instn. Mech. Engrs., London, vol. 178, Pt 1), p55, 1963—64.
2. *F. Nagao, K. Nishiwaki, F. Yokoyama*, Bulletin of I. S. M. E., vol. 12, nr. 52, 1969
3. *T. G., Prosser*, „Induction ramming a motored high-speed four stroke reciprocating-engine — influence of inlet port pressure waves on volumetric efficiency", Proc. Instn. Mech. Engrs., London, Vol. 188, 49.
4. *S. Minculescu, D. Taraza*, Buletinul I. P. B., Seria Mecanică, Tomul XLIII, nr. 1, 1981.
5. *S. Minculescu*, „Contribuție la studiul fenomenelor dinamice asociate umplerii la motoru în 4 timpi, cu aspirație", Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1983
6. *W. A., Woods, R. Ghirlando*, „Radial flow in an engine cylinder near the end of compression" Vol. Conference on Combustion in Engines, The Inst. Mech. Engres., 1975.

A Study of the Flow Coefficient in Particular Cases of Inlet and Exhaust Valves

The paper presents an original interpretation of the flow coefficient in correlation with the real characteristics of flow through. I. C. Engine valves : inflow and outflow in the period between the opening and closing of each valve and the coherent variations of the flow coefficients for the two valves.

C.Z.: 621. 16. 18: 662. 743

INSTALAȚIA DE PREGĂTIRE A PRAFULUI DE LIGNIT CU BUNCĂR INTERMEDIAR SEMIDESCHISĂ — O SOLUȚIE PENTRU ELIMINAREA HIDROCARBURILOR FOLOSITE COMBUSTIBIL SUPORT

C.C. NEAGA*

În lucrare se analizează caracteristicile schemei de pregătire a prafului de lignit cu buncăr intermediar semideschisă. În concluzie această tehnologie de preparare a prafului poate constitui o soluție pentru eliminarea din industria energetică a hidrocarburilor gazoase și lichide folosite combustibil suport.

Folosirea din ce în ce mai mare a combustibililor solizi inferiori ca purtători de energie primară în producerea de energie electrică impune cu necesitate măsuri pentru asigurarea stabilității arderii lor în focarele cazanelor. Datorită conjuncturii actuale utilizarea hidrocarburilor lichide și gazoase în calitate de combustibili suport este neeconomică. Printre tehnologiile noi de preparare a prafului de combustibil solid inferior care duc la asigurarea stabilității arderii lui fără să apeleze la un combustibil de aport se numără și instalația cu buncăr intermediar semideschisă a cărei analiză constituie obiectul lucrării de față.

Lignitul concasat (fig. 1) pătrunde în turnul de preuscare T. Datorită morii MV care are și rol de ventilator, în turn pătrund gaze de ardere prelevate de la sfîrșitul focarului; ele au rol de agent de uscare și transport al prafului. În separatorul morii S particulele de praf cu dimensiuni prea mari sînt separate și reintroduse în aspirația morii. Amestecul primar format din praf și agent de uscare și transport (gaze de ardere recirculate, vapori de apă rezultați din preuscarea lignitului, aerul fals aspirat în moară) intră în desprăfuitorul ciclon D_1 unde majoritatea fazei solide este separată; praful separat este colectat în buncărul B_1. Agentul de transport care iese din D_1 împreună cu praful neseparat este împărțit în doi curenți: o parte este preluată de ventilatorul VM_1 și servește la transportul prafului din buncărul B_1 spre arzătorul de bază al focarului; restul este condus cu ajutorul lui VM_2 în desprăfuitorul D_2 (poate fi desprăfuitor ciclon sau electrofiltru) unde are loc separarea completă a prafului antrenat. Praful separat este depozitat în buncărul B_2, iar faza gazoasă inertă este evacuată în atmosferă sau în aspirația ventilatoarelor de gaze de ardere ale cazanului. Din B_2 praful este preluat cu ajutorul aerului primar și condus spre arzătorul suport al focarului. Deoarece agentul de antrenare al prafului din B_2 nu conține gaze de ardere recirculate și vapori de apă cu efect inhibant asupra procesului de ardere, flacăra arzătorului suport

* Șef lucrări dr. ing., catedra Cazane și turbine

are o temperatură mai mare decît cea a arzătorului de bază, caracteristică ce-i conferă rolul de „flacără suport". Se fac două observații:

— deoarece faza solidă existentă în agentul de transport la ieșirea din D_1 este constituită din particule fine în care predomină masa minerală a lignitului, rezultă că puterea calorică a prafului din B_2 este inferioară puterii calorice a prafului din B_1, ceea ce influențează asupra temperaturii flăcării suport; în cercetările experimentale aceste diferențe pot fi determinate exact;

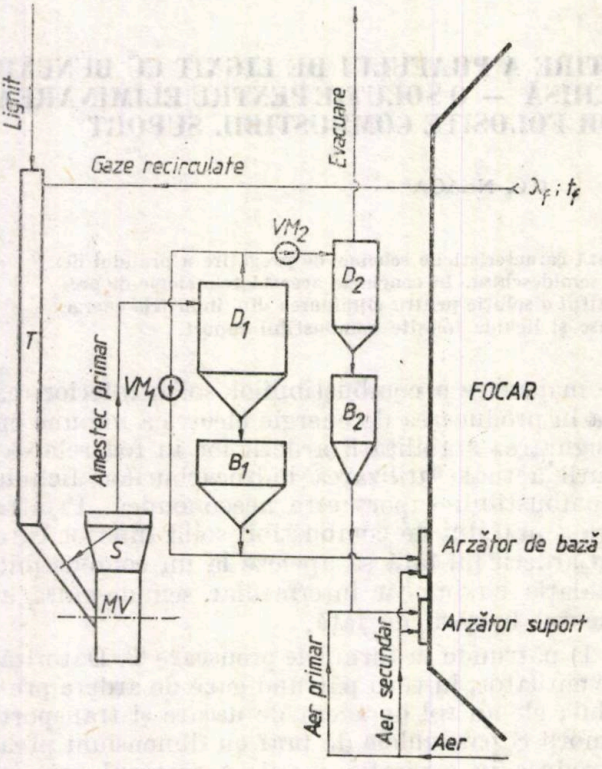


Fig. 1. — Schema de pregătire a prafului de lignit cu buncăr intermediar semideschisă: T — turn de preuscare; MV — moara ventilator; S — separatorul morii; D_1, D_2 — despărfuitoare ciclon; B_1, B_2 — buncăre de praf; VM_1, VM_2 — ventilatoarele morii.

— întrucît cea mai mare parte a agentului de uscare și transport ocolește focarul și deci nu participă prin oxigenul său la arderea combustibilului, nu este indicat să se introducă aer primar în moară, cu atît mai mult cu cît aerul preîncălzit este un agent de uscare inferior gazelor recirculate; dacă debitul de agent de transport necesar este mai mare decît al gazelor recirculate de la sfîrșitul focarului, atunci restul este satisfăcut cu gaze prelevate din alte zone ale canalelor cazanului; acest fenomen conduce însă la unele implicații în funcționarea cazanului [2].

Debitele materiale în diverse puncte ale instalației

Calculul debitelor materiale și termice ale instalației analizate în această lucrare se referă la combustibilul concasat, cu caracteristicile de la intrarea în turnul de preuscare.

În absența recirculării gazelor, prin focar și deci prin canalele de convecție ale cazanului va circula un debit a cărui valoare se calculează cu expresia analitică

$$D_{ga} = B_e V_g(\lambda_f) - (1 - a) v_{H_2O} B \Delta W_{tm}, \ m_N^3/s, \qquad (1)$$

unde B_{ef} este debitul de cărbune care arde efectiv, kg/s; $B_{ef} = (1 - 0{,}01\ q_m)\ B$, B — debitul de lignit concasat, kg/s; q_m — pierderea procentuală

prin ardere mecanic incompletă, %; $V_g(\lambda_f)$ — volumul gazelor rezultate din arderea unui kilogram de cărbune, m_N^3 /kg; λ_f — coeficientul de exces de aer la sfîrșitul focarului; a — fracția de fază gazoasă preluată de ventilatorul VM_1 și introdusă în focar; v_{H_2O} — volumul specific al vaporilor de apă, kg/m_N^3; ΔW_{tm} — cantitatea de apă eliminată în procesul de preuscare a cărbunelui, kg/kg;

$$\Delta W_{tm} = (W_t^i - W_p)/(100 - W_p), \tag{2}$$

unde W_t^i, W_p sînt, respectiv, umiditatea totală inițială a lignitului și a prafului, %.

Din condiția de preuscare a lignitului în turn și moară, rezultă debitul gazelor recirculate de la sfîrșitul focarului, exprimat ca o fracție din debitul care circulă prin focar în absența recirculării (acest debit recirculat poate fi corectat pentru îndeplinirea condiției de ventilare a morii)

$$D_{gr} = r\, D_{ga},\ m_N^3/s, \tag{3}$$

unde r este gradul de recirculare.

Debitul agentului de uscare și transport după separator se calculează cu formula

$$D_{mv} = D_{gr} + \Delta\lambda_m B_{ef} V_{aum}^0 + v_{H_2O} B \Delta W_{tm},\ m_N^3/s, \tag{4}$$

unde $\Delta\lambda_m$ este infiltrația de aer fals în moară; V_{aum}^0 — volumul teoretic de aer necesar arderii, m_N^3 /kg.

Debitul fazei solide după separator rezultă din expresia

$$B_{mv} = (1 - \Delta W_{tm})B + \mu_a D_{gr},\ kg/s, \tag{5}$$

unde μ_a este concentrația de cenușă în gazele recirculate din focar,

$$\mu_a = 0{,}01 a_{antr} B A^i / D_{ga},\ kg/m_N^3; \tag{6}$$

a_{antr} — fracția de cenușă antrenată; A^i — conținutul de cenușă al lignitului, %.

Cu expresiile precedente se poate calcula concentrația fazei solide în amestecul primar $\mu_p = B_{mv}/D_{mv}$, kg/m_N^3.

Din desprăfuitorul D_1 cele două faze se repartizează astfel:

Debitul de praf separat și depozitat în buncărul B_1 are expresia φB_{mv}, unde φ este gradul de separare al desprăfuitorului D_1;

— cu faza gazoasă D_{mv} la ieșirea din desprăfuitorul D_1 va fi antrenat debitul de praf $(1 - \varphi)B_{mv}$;

— concentrația prafului la ieșirea din D_1 are expresia $(1-\varphi)B_{mv}/D_{mv}$;

— debitul fazei gazoase antrenată de VM_1 are valoarea aD_{mv};

— debitul de praf antrenat de VM_1 este $(1 - \varphi)\, aB_{mv}$; acesta se însumează cu cel colectat în buncărul B_1, astfel că debitul de praf al arzătorului de bază are expresia

$$\varphi B_{mv} + (1 - \varphi) a B_{mv},\ kg/s.; \tag{7}$$

— concentrația prafului spre arzătorul de bază

$$\mu_{pb} = \frac{\varphi + (1 - \varphi)a}{a} \frac{B_{mv}}{D_{mv}} = \frac{\varphi + (1 - \varphi)a}{a} \mu_p,\ kg/m_N^3; \tag{8}$$

ea trebuie calculată pentru a evita sedimentarea prafului pe pereții canalului de transport;

— spre desprăfuitorul D_2 merg debitul de praf $(1-\varphi)(1-a)B_{mv}$ și debitul fazei gazoase $(1-a)D_{mv}$; în D_2 presupunem separarea completă a celor două faze, astfel, că în atmosferă se evacuează întreg debitul fazei gazoase, iar debitul de praf al arzătorului suport este $(1-\varphi)(1-a)B_{mv}$, kg/s;

— debitul de aer spre arzătorul de bază are expresia

$$[\varphi+(1-\varphi)a]B_{ef}\lambda_i V^0_{aum}-a\Delta\lambda_m B_{ef}V^0_{aum},\ \mathrm{m^3_N/s}, \tag{9}$$

unde λ_i este coeficientul de exces de aer la intrarea în focar;

— debitul de aer (primar și secundar) al arzătorului suport

$$(1-\varphi)(1-a)B_{ef}\lambda_i V^0_{aum},\ \mathrm{m^3_N/s}. \tag{10}$$

Cu aceste valori se pot calcula temperaturile teoretice de ardere ale flăcărilor celor două arzătoare (nu se ține seama de eventualele pierderi de căldură ale arderii);

— pentru arzătorul de bază

$$\begin{aligned}&aD_{mv}(c_g t)'_p+[\varphi+(1-\varphi)a]B_{mv}(c_s t)_p+\{[\varphi+(1-\varphi)a\lambda_i-\\&-a\Delta\lambda_m\}B_{ef}I^0_{aum}(t''_p)+[\varphi+(1-\varphi)a]\cdot(1-\Delta W_{tm})B\cdot Q^i_{ip}=\\&=[\varphi+(1-\varphi)a]B_{ef}\cdot[I_g(\lambda_i,t_t)-v_{H_2O}\Delta W_{tm}(c_{H_2O}t)'_t]+\\&+a(D_{mv}-\Delta\lambda_m B_{ef}V^0_{aum})\cdot(c_g t)'_t+[\varphi+(1-\varphi)a]\mu_a D_{gr}(c_a t)_t;\end{aligned} \tag{11}$$

— pentru arzătorul suport

$$\begin{aligned}&(1-\varphi)(1-a)B_{mv}(c_s t)_p+(1-\varphi)1-a)E_{ef}\lambda_i I^0_{aum}(t''_p)+\\&+(1-\varphi)(1-a)(1-\Delta W_{tm})BQ^i_{ip}=(1-\varphi)(1-a)B_{ef}\cdot[I_g(\lambda_i,t_t)-\\&-v_{H_2O}\Delta W_{tm}(c_{H_2O}t)_t]+(1-\varphi)(1-a)\mu_a D_{gr}\cdot(c_a t)_t;\end{aligned} \tag{12}$$

expresia 12 se poate simplifica cu $(1-\varphi)(1-a)$, ceea ce arată independența temperaturii flăcării arzătorului suport de distribuția fazelor solidă și gazoasă; ea s-ar fi putut obține și din (11), considerînd $\varphi=1$ și $a=0$; s-au folosit notațiile: c_g, c_{H_2O} = căldura specifică a gazelor, respectiv, a vaporilor de apă, kJ/(m^3_N · K);
c_s, c_a — căldura specifică a fazei solide, respectiv, a cenușii antrenate, kJ/(kg. K); t''_p — temperatura aerului preîncălzit, °C;
t_t — temperatura teoretică, necunoscuta ecuațiilor de bilanț scrise, °C;
$Q^i_{i,p}$ — puterea calorică inferioară a prafului de lignit, kJ/kg (se calculează cunoscînd puterea calorică inferioară a lignitului concasat Q^i_i și umiditățile W^i_i și W_p).

Grafice și interpretarea lor

Pentru exemplificarea valorilor efective ale temperaturilor flăcărilor celor două arzătoare s-a folosit lignit din Bazinul Olteniei. Utilizînd metodica prezentată în [2] s-au putut trasa curbele din figura 2. Pentru același grad de reținere al prafului în desprăfuitorul D_1, φ = const

(s-a considerat parametru variabil) temperatura flăcării arzătorului de bază scade cu creșterea fracției gazoase a dirijată spre arzătorul de bază. Pentru a = const, temperatura flăcării arzătorului de bază crește cînd φ crește.

Dacă $a = 1$ și φ oricare, schema de pregătire a prafului devine cu insuflare directă, închisă și temperatura teoretică în focar capătă valoarea uniformă în întreg volumul lui și egală pentru condițiile alese cu 1436°C. Pentru $a = 0$ și $\varphi = 1$ se obține temperatura teoretică a flăcării arzătorului, suport egală cu 1903°C. De fapt acestea sînt și caracteristicile schemei deschise de preparare a prafului.

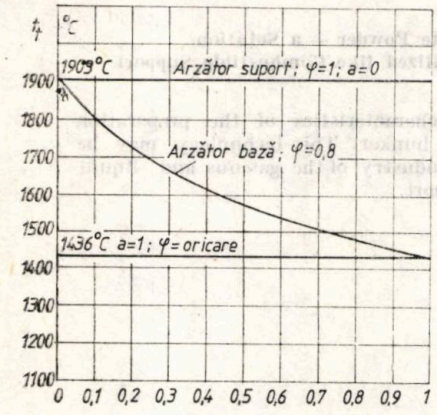


Fig. 2. — Dependența temperaturii teoretice de ardere a flăcării celor două arzătoare de bază și suport de variabila a și parametrul φ.

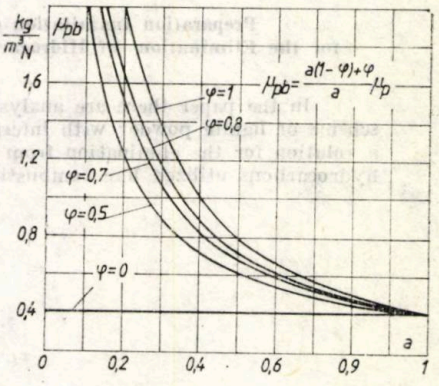


Fig. 3 — Variația concentrației prafului în conducta arzătorului de bază cu a și φ.

Din considerente tehnice și economice se aleg cuplurile de valori a și φ. Să admitem $a = 0{,}4$ și $\varphi = 0{,}8$. În aceste condiții temperatura flăcării arzătorului de bază capătă valoarea 1610°C, iar a arzătorului suport (independentă de a și φ) 1903°C. Dacă în anumite regimuri de funcționare, temperatura flăcării arzătorului de bază scade periclitînd stabilitatea ei, flacăra arzătorului suport contribuie la asigurarea stabilității arderii în ansamblu în spațiul focarului. În alegerea valorilor a și φ trebuie să se țină seama de valoarea concentrației prafului în conducta spre arzătorul de bază μ_{pb}, figura 3.

Concluzii

— Instalația de preparare a prafului cu buncăr intermediar semideschisă ca o nouă tehnologie de ardere a prafului de combustibil solid inferior, constituie o metodă de asigurare a stabilității arderii și deci poate elimina utilizarea hidrocarburilor în același scop;

— deoarece o parte a agentului de uscare și transport este evacuat din desprăfuitorul D_2 în atmosferă cu o temperatură, de regulă, mai mică

decît gazele care părăsesc preîncălzitorul de aer al cazanului, pierderile q_{ev} sînt mai mici şi deci randamentul unui asemenea cazan este mai mare, decît faţă de cazul în care el ar fi echipat cu o instalaţie închisă de preparare a prafului, [2];

— instalaţia este mai complexă decît cea cu insuflare directă.

BIBLIOGRAFIE

1. *C. C. Neaga*, Construcţia de maşini, 5/1983, pg. 219—223.
2. *C. C. Neaga*, Energetica, 10/1984, pg. 437—443

Preparation Installation of Lignite Powder — a Solution for the Elimination of Hidrocarbons Utilized like Combustible Support

In the paper there are analysed the characteristics of the preparation scheme of lignite powder with intermediary bunker. This technology may be a solution for the elimination from power industry of the gaseous and liquid hydrocarbons utilized like combustible support.

C.Z.: 621. 165—25

STUDIUL MIȘCĂRII UNUI ROTOR CU ARBORE ELASTIC LA TRECEREA NESTAȚIONARĂ PRIN TURAȚIA CRITICĂ

GH. HOBEANU*

În lucrare sînt prezentate rezultate teoretice noi referitoare la trecerea uniform accelerată a unui rotor cu arbore elastic, prin turația critică.

Expresiile obținute de autor, pentru oscilația centrului de greutate sînt mai simple decît cele existente în literatură și sînt mai ușor accesibile calculelor numerice.

Aceste rezultate deschid posibilitatea introducerii unor funcții de aproximare analitică a mișcării rotorului, în vecinătatea rezonanței.

1. Introducere

Deosebirile esențiale între regimul staționar (accelerație unghiulară nulă, $\varepsilon = 0$) și cel nestaționar ($\varepsilon \neq 0$) se manifestă la trecerea prin turația critică. Această situație apare la pornirea sau oprirea mașinilor rotative cu arbore elastic.

Dacă ne referim la mașinile termice rotative de forță (turbine cu abur, turbine cu gaze) constatăm că există tendința creșterii puterii unitare.

Creșterea puterii se realizează prin mărirea căderii de entalpie la destinderea în turbină și a debitului admis. Primul procedeu mărește numărul treptelor de destindere și deci lungimea rotorului turbinei. Cel de al doilea procedeu necesită creșterea secțiunii de curgere, deci a lungimii paletelor, diametrelor discurilor și în final a greutății pieselor rotorice.

Ambele procedee conduc la necesitatea de a utiliza arbori elastici, cu creșterea puterii unitare, de aceea această soluție constructivă este larg răspîndită.

Datorită dificultăților matematice specifice teoria mișcării nestaționare [2—4] nu este cercetată suficient deși aplicațiile acestei teorii la mașinile rotative sînt importante fiind legate de siguranța și economicitatea în exploatare.

2. Ecuația de mișcare

Ne vom referi la principalii factori care influențează oscilațiile unui rotor și anume elasticitatea, amortizarea și accelerația unghiulară. Modelul matematic [1, 2] are la bază un model fizic schematizat alcătuit din-

* Șef lucrări dr. ing., catedra Cazane și turbine

tr-un rotor cu un singur disc de masă m, centru de greutate G și centru elastic C (care coincide celui geometric).

Distanța $CG = \tilde{e}$ reprezintă excentricitatea rotorului.

Arborele este sprijinit pe două lagăre rigide, are constanta elastică c și se rotește în jurul propriei sale axe deformate.

Considerăm ecuația de mișcare [3] a centrului de greutate G în sistemul de coordonate mobil,

$$\zeta_G'' + 2\beta\left(i\alpha + \gamma + \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{2p^2}\right)\zeta_G' + \beta^2\left(1 - \alpha^2 + 2\gamma i\alpha + \frac{i}{\beta}\right)\zeta_G = \beta^2(1 + 2\gamma i\alpha) \tag{1}$$

unde

$$\zeta_G = \xi_G + i\eta_G\,;\quad \beta = \frac{p^2}{\varepsilon}\,;\quad p^2 = \frac{c}{m}\,;\quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

$$\gamma = \frac{n}{p}\,;\quad n = \frac{k}{2m}\,;\quad \alpha = \frac{\dot{\varphi}}{p}\,;\quad \ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

k — coeficient de amortizare vîscoasă; φ — unghi de rotație iar prin linioare sînt însemnate derivatele în raport cu variabila α.

Efectuăm schimbarea de funcție

$$\zeta_G = w\,\exp\left[-\frac{p^2}{\varepsilon}\left(i\alpha + \gamma + \frac{\varepsilon'}{2p^2}\right)\right] \tag{3}$$

și ecuația (1) capătă forma

$$w'' + \beta^2\left[1 - \gamma^2 - \frac{2\varepsilon'}{p^2}(i\alpha + \gamma) - \frac{\varepsilon'^2}{4p^2} - \frac{\varepsilon''}{2\beta p^2}\right]w =$$

$$= \beta^2(1 + 2\gamma i\alpha)\exp\frac{p^2}{\varepsilon}\left(i\alpha + \gamma + \frac{\varepsilon'}{2p^2}\right) \tag{4}$$

3. Soluția ecuației de mișcare

Pentru rezolvarea ecuației (4) este necesară precizarea legii de variație a coordonatei unghiulare φ și deci a accelerației unghiulare ε. Soluția ecuației (1) este de forma $\zeta_G = \zeta_G + \zeta_{Gp1} + \zeta_{Gp2}$.

Vom determina această soluție rezolvînd ecuația (4) pentru $\varepsilon = \mathrm{ct}$, care devine

$$w'' + \beta^2(1 - \gamma^2)w = \beta^2(1 + 2\gamma i\alpha)\exp\beta\left(\frac{i\alpha^2}{2} + \alpha\gamma\right) \tag{5}$$

Soluția generală a ecuației (5) este alcătuită din soluția $\bar{w}$ a ecuației omogene însumată cu soluția particulară w_p a ecuației neomogene, adică $w = \bar{w} + w_p$.

3.1. Soluţia ecuaţiei neomogene

Anulînd termenul perturbator al ecuaţiei (5) aceasta devine omogenă şi are soluţia

$$\bar{w} = w_0 \cos \beta\sqrt{1-\gamma^2}(\alpha - \alpha_0) + \frac{w_0'}{\beta\sqrt{1-\gamma^2}} \sin \beta\sqrt{1-\gamma^2}(\alpha - \alpha_0) \qquad (6)$$

Referindu-ne la mişcarea centrului de greutate, acestei soluţii îi corespunde componenta

$$\bar{\zeta}_G = [\cos \beta^*\alpha^* + (\bar{a}+i\bar{b}) \sin \beta^*\alpha^*]\zeta_{0G} \exp\left\{-\beta\left[\frac{i}{2}(\alpha^2-\alpha_0^2)+\gamma(\alpha-\alpha_0)\right]\right\} \qquad (7)$$

unde

$$\bar{a} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{2\alpha_0}{\beta^*(1+4\gamma^2\alpha_0^2)^2} \qquad \bar{b} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\gamma^2}} - \frac{2\alpha_0\gamma(3+4\gamma^2\alpha_0^2)}{\beta^*(1+4\gamma^2\alpha_0^2)^2}$$

$$\beta^* = \beta\sqrt{1-\gamma^2}; \quad \alpha^* = \alpha - \alpha_0 \qquad (8)$$

$$\zeta_{0G} = \zeta_G|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{1+2\gamma i\alpha_0}{1-\alpha_0^2+2\gamma i\alpha_0}$$

3.2. Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene

O soluţie particulară a ec. (5) este

$$w_p = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} (1+2\gamma i\tau)\, exp\left(\frac{i\tau^2}{2}+\gamma\tau\right) \beta \sin \beta^*(\alpha-\tau)\, d\tau \qquad (9)$$

Utilizînd exprimarea funcţiei sinus prin funcţii exponenţiale obţinem

$$w_p = w_{p1} + w_{p2}$$

$$w_{p1} = \frac{1}{2i}\frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} (1+2\gamma i\tau) \exp\left[\frac{i\tau^2}{2} + \gamma\tau + i\sqrt{1-\gamma^2}(\alpha-\tau)\right] d\tau \qquad (10)$$

$$w_{p2} = -\frac{1}{2i}\frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} (1+2\gamma i\tau) \exp\left[\frac{i\tau^2}{2} + \gamma\tau - i\sqrt{1-\gamma^2}(\alpha-\tau)\right] d\tau$$

3.2.1. Calculul componentei ζ_{Gp1}

Prin schimbarea de variabilă independentă

$$\sigma_{1\tau} = \beta\frac{c_1}{2i} - \beta\left(\frac{i\tau^2}{2} + \gamma^2\tau - i\sqrt{1-\gamma^2}\tau\right)$$

$$c_1 = 1 - 2\gamma^2 + 2i\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \qquad (11)$$

componenta w_{p1} devine

$$w_{p1} = -\frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\exp i\beta^*\alpha + \frac{\beta c_1}{2i}\left[\frac{c_1}{i\sqrt{2}i}\sqrt{\beta}\int_{\sigma_{10}}^{\sigma_1}\frac{e^{-\sigma_{12}}}{\sqrt{\sigma_{12}}}\,d\sigma_{12} - i\gamma(e^{-\sigma_1} - e^{-\sigma_{10}})\right] \tag{12}$$

Principala dificultate de a determina mărimea w_{p1} constă în calculul integralei $\int_{\sigma_{10}}^{\sigma_1}\frac{e^{-\sigma_1\tau}}{\sqrt{\sigma_{12}}}\,d\sigma_{1\tau}$.

Utilizînd lema lui Jordan considerăm conturul de integrare închis prin cercul de la infinit al planului complex (fig. 1)

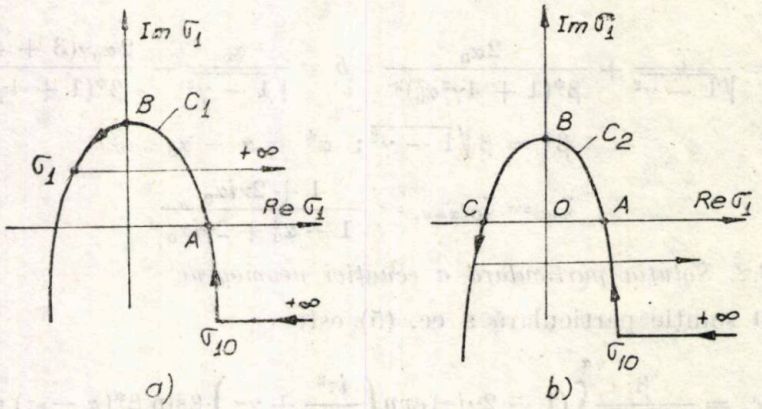


Fig. 1. 1 Imaginea variabilei σ_1 în planul complex
a) conturul de integrare pentru arg $\sigma_1 < \pi$;
b) idem pentru arg $\sigma_1 > \pi$.

Obținem exprimarea prin funcția gamma incompletă

$$\int_{\sigma_{10}}^{\sigma_1}\frac{e^{-\sigma_{1\tau}}}{\sqrt{\sigma_{1\tau}}}\,d\sigma_{1\tau} = 2k_1\sqrt{\pi} + \int_{\sigma_{10}}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_{1\tau}}}{\sqrt{\sigma_{1\tau}}}\,d\sigma_{1\tau} - \int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_{1\tau}}}{\sqrt{\sigma_{1\tau}}}\,d\sigma_{1\tau}. \tag{13}$$

unde

$$K_1 = \begin{cases} 0 \text{ pentru arg } \sigma_1 < \pi, \text{ adică } \alpha < \gamma + \sqrt{1-\gamma^2} \\ 1 \text{ pentru arg } \sigma_1 > \pi, \text{ adică } \alpha > \gamma + \sqrt{1-\gamma^2} \end{cases} \tag{14}$$

Pentru calculul integralei $\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma 1\tau}}{\sqrt{\sigma_{1\tau}}}\,d\sigma_{1\tau}$, la care au ajuns și alți autori [4], spre deosebire de aceștia propunem substituția

$$\sigma_{1\tau} - \sigma_1 - \ln r;\ d\sigma_{1\tau} = -\frac{dr}{r}$$

care conduce la forma

$$\int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_1 \tau}}{\sqrt{\sigma_{1\tau}}} \, d\sigma_{1\tau} = e^{-\sigma_1} \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{\sigma_1 - \ln r}} \tag{16}$$

Introducem notațiile

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1 - \ln r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{f_1 + f_2} - ik_2 \sqrt{f_1 - f_2}\right) \tag{17}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{(x_{\sigma_1} - \ln r)^2 + y_{\sigma_1}^2}}; \quad f_2 = \frac{x_{\sigma_1} - \ln r}{(x_{\sigma_1} - \ln r)^2 + y_{\sigma_1}^2} \tag{18}$$

$$x_{\sigma_1} + \operatorname{Re} \sigma_1 = -\beta\gamma(\alpha - \sqrt{1 - \gamma^2}); \; y_{\sigma_1} = \operatorname{Im} \sigma_1 =$$

$$= \frac{\beta}{2} (\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{1 - \gamma^2} + 1 - 2\gamma^2) \tag{19}$$

unde valoarea constantei k_2 este funcție de variația argumentului mărimii complexe $(\sigma_1 - \ln r)^{-1/2}$.

Dacă $\alpha < \sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma$, $y_{\sigma_1} < 0$, $\arg(\sigma_1 - \ln r) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ și deci pentru $r \in (0, 1)$, $\arg(\sigma_1 - \ln r)^{-1/2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; aceeași concluzie este valabilă și pentru $\alpha > \sqrt{1 - \gamma^2} + \gamma$ (fig. 2 a).

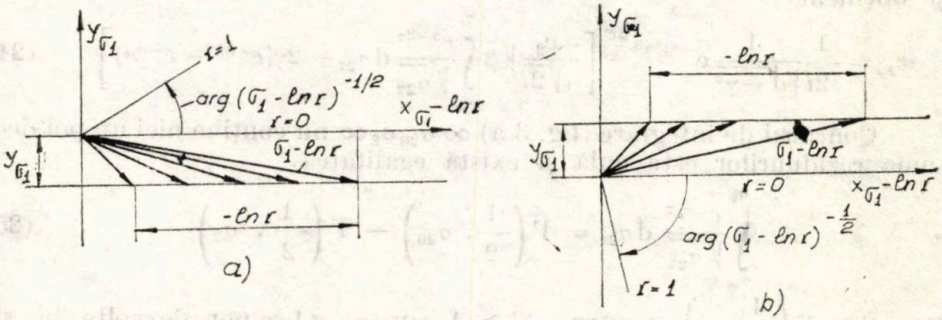


Fig. 2 — Variația $\arg(\sigma_1 - \ln r)^{-1/2}$ funcție de semnalul y_{σ_1}: a ($y_{\sigma_1} < 0$; b) $y_{\sigma_1} > 0$

Pentru $\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma < \alpha < \sqrt{1 - \gamma^2} + \gamma$, $\arg(\sigma_1 - \ln r) \in (0, \pi)$ și $\arg(\sigma_1 - \ln r)^{-1/2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, așa cum rezultă în fig. 2. b. În con-

secinţă se poate scrie :

$$k_2 = \begin{cases} -1 \text{ pentru} & \alpha < \sqrt{1-\gamma^2} - \gamma \\ 1 \text{ pentru} & \sqrt{1-\gamma^2} - \gamma < \alpha < \sqrt{1-\gamma^2} + \gamma \\ -1 \text{ pentru} & \alpha > \sqrt{1-\gamma^2} + \gamma \end{cases} \tag{20}$$

Avînd în vedere notaţiile

$$S_{11} = \int_0^1 \sqrt{f_1 + f_2}\, dr; \quad S_{12} = \int_0^1 \sqrt{f_1 - f_2}\, dr$$

$$S_{110} = S_{11}|_{\sigma_1=\sigma_{10}}; \quad S_{120} = S_{12}|_{\sigma_1=\sigma_{10}} \tag{21}$$

poate fi exprimată soluţia w_{p1} dată de relaţia (12).

Aplicînd pentru $\varepsilon' = 0$, relaţia (3), aflăm componenta corespunzătoare ζ_{Gp1}, adică

$$\zeta_{Gp1} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\frac{1-i}{4}\sqrt{\beta}C_1\left(2k_1\sqrt{\pi}e^{\sigma_1} + e^{\sigma_1-\sigma_{10}}\frac{S_{110} - ik_2S_{120}}{\sqrt{2}} - \frac{S_{11} - ik_2S_{12}}{\sqrt{2}}\right) - i\gamma(1 - e^{\sigma_1-\sigma_{10}})\right] \tag{22}$$

3.2.2. *Calculul componentei* ζ_{Gp2}

Determinarea acestei componente a oscilaţiei centrului de greutate are la bază termenul w_{p2} din relaţia (10).

Efectuăm schimbarea de variabilă independentă

$$\sigma_{2\tau} = \beta\frac{c_2}{2i} - \beta\left(\frac{i\tau^2}{2} + \gamma_\tau + i\sqrt{1-\gamma^2}\tau\right)$$

$$c_2 = 1 - 2\gamma^2 - 2\gamma i\sqrt{1-\gamma^2} \tag{23}$$

şi obţinem

$$w_{p2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}e^{-i\beta^*\alpha + \frac{\beta C_2}{2i}}\left[\frac{c_2}{i\sqrt{2i}}\sqrt{\beta}\int_{\tau_{20}}^{\tau_2}\frac{e^{\sigma-2\tau}}{\sqrt{\sigma_{2\tau}}}\,d\sigma_{2\tau} - 2\gamma(e^{-\sigma^2} - e^{-\sigma_{20}})\right] \tag{24}$$

Conturul de integrare (fig. 3 a) $\infty\,\sigma_{20}\sigma_2\infty$ nu conţine nici un pol deci suma reziduurilor este nulă şi există egalitatea

$$\int_{\sigma_{20}}^{\sigma_2}\frac{e^{-\sigma_{2\tau}}}{\sqrt{\sigma_{2\tau}}}\,d\sigma_{2\tau} = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_{20}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_2\right). \tag{25}$$

Funcţiile $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma\right)$, pentru $|\sigma| \gg 1$ sau $|\sigma| \ll 1$ se pot dezvolta în şir asimptotic, respectiv serie convergentă. Pentru $0{,}7 < |\sigma| < 2{,}25$ este necesară integrarea numerică.

Efectuăm substituţia

$$\sigma_{2\tau} = \sigma_2 - \ln r; \quad d\sigma_{2\tau} = -\frac{dr}{r} \tag{26}$$

și obținem

$$\int_{\sigma_2}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_2\tau}}{\sqrt{\sigma_2\tau}}\, d\sigma_2\tau = e^{-\sigma_2} \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{\sigma_2 - \ln r}} \tag{27}$$

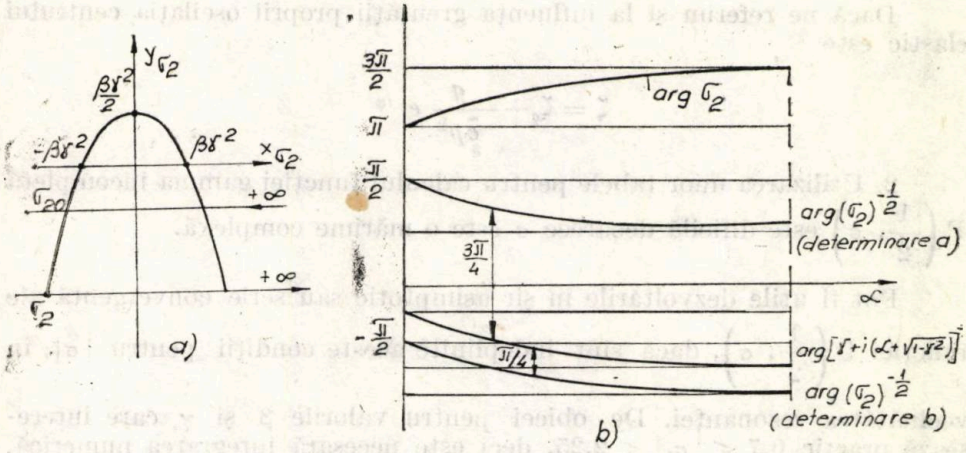


Fig. 3 — Conturul de integrare și variația arg $(\sigma_2 - \ln r)^{-1/2}$
a) imaginea variabilei σ_2 în planul complex; b) variația arg $(\sigma_2 - \ln r)^{-1/2}$

Pentru $\alpha_0 < \alpha < \alpha_2$ unde $\alpha_0 < 1$ și $\alpha_2 > 1$, $y_{\sigma_2} < 0$, arg $(\sigma_2 - \ln r) \in (-\pi, 0)$ și arg $(\sigma_2 - \ln r)^{-1/2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deci se poate scrie

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_2 - \ln r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{g_1 + g_2} + i\sqrt{g_1 - g_2}) \tag{28}$$

$$g_2 = \frac{1}{\sqrt{(x_{\sigma_2} \ln r)^2 + y_{\sigma_2}^2}}; \quad g_2 = \frac{x_{\sigma_2} - \ln r}{(x_{\sigma 2} - \ln r)^2 + y_{\sigma_2}^2} \tag{29}$$

Folosind notațiile

$$S_{21} = \int_0^1 \sqrt{g_1 + g_2}\, dr; \qquad S_{22} = \int_0^1 \sqrt{g_1 - g_2}\, dr \tag{30}$$

$$S_{210} = S_{21}|_{\sigma_2 = \sigma_{20}}; \quad S_{220} = S_{22}|_{\sigma_2 = \sigma_{20}}$$

și aplicînd relației (24) transformarea (3), pentru $\varepsilon' = 0$, determinăm componenta ζ_{Gp2}

$$\zeta_{Gp2} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \left\{ \frac{1 - i\sqrt{\beta}}{4\sqrt{2}} c_2 [(S_{210} + iS_{220}) e^{\sigma_2 - \sigma_{20}} + S_{21} + iS_{22}] - \right.$$
$$\left. - i\gamma(1 - e^{\sigma_2 - \sigma_{20}}) \right\} \tag{31}$$

4. Concluzii

1. Cercetarea mișcării centrului de greutate nu trebuie considerată o ipoteză simplificatoare avînd în vedere că mișcarea centrului elastic, în sistemul de coordonate mobil, este dată de relația

$$\zeta_e = \zeta_G - 1$$

Dacă ne referim și la influența greutății proprii oscilația centrului elastic este

$$\zeta = \zeta_e + \frac{g}{\tilde{e}p^2} e^{-i\varphi}$$

2. Utilizarea unor tabele pentru calculul funcției gamma incompletă $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma\right)$ este dificilă deoarece σ este o mărime complexă.

Pot fi utile dezvoltările în șir asimptotic sau serie convergentă ale funcției $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma\right)$, dacă sînt îndeplinite aceste condiții pentru $|\sigma|$, în vecinătatea rezonanței. De obicei pentru valorile β și γ care interesează practic $0{,}7 < |\sigma_1| < 2{,}25$, deci este necesară integrarea numerică.

3. Lucrarea, prin definirea funcțiilor f_1 și f_2 și a integralelor S_{11} și S_{12} permite de fapt separarea integralei $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_1\right)$ în parte reală și parte imaginară.

Partea reală S_{11} și coeficientul părții imaginare S_{12} sînt integrale reale, accesibile procedeelor de evaluare numerică sau de aproximare analitică, dezvoltate în teoria funcțiilor reale.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gh. Hobeanu*, Stud. Cerc. Mec. Apl., 31, 5, 1089 — 1097 (1972).
2. *Gh. Hobeanu*, Stud. Cerc. Energ., 3,45 — 56,(1972)
3. *Gh. Hobeanu*, Contribuții la studiul oscilațiilor rotoarelor turbinelor cu abur, în regim nestaționar. Teză de doctorat, Inst. Politehnic București, 1977
4. *F. M. Lewis*, Vibration During Acceleration Through a Critical Speed. Tans. A.S.M.E. 54, 23, 253 (1932)

Rotor with Elastic Shaft Mouving Analysis when Passing Through the Critical Speed

This paper presents new theoretical results concerning the uniform accelerated mouvement of a rotor with an elastic shaft through the critical speed. The practical importance of these results consists of providing simple and easy manegeable relations for the oscillation of the gravity center. Also they can be solved easily using numerical method.

These new results permit the introduction of some analytical approximation functions for the rotor moving, near the resonance range.

C. Z. 621. 43 : 539. 62

O MODALITATE DE ESTIMARE A DURABILITĂȚII PIESELOR ÎN FRECARE LA MOTOARELE CU ARDERE INTERNĂ DE CONCEPȚIE NOUĂ

T. TURCOIU*

Lucrarea prezintă o modalitate de estimare a durabilității pieselor în frecare, prin calcul, pe baza înregistrării uzurii acestora în timpul unei probe de durată. S-a utilizat un motor diesel răcit cu aer, de 7 CP la 3000 rot/min, de concepție nouă.

1. Introducere

Durabilitatea diferitelor organe ale unui motor cu ardere internă reprezintă o caracteristică determinantă pentru utilizarea acestuia în exploatare. De aceasta depinde durabilitatea generală a motorului și competitivitatea lui în competiția cu motoare similare.

Pentru motoarele din fabricația curentă durabilitatea diferitelor organe este cunoscută și verificată în exploatare. În general, pentru aceste motoare, durabilitatea principalelor organe (în special cele care realizează cupluri de piese în frecare) este trecută în prospectele sau notițele tehnice ale motoarelor respective.

Pentru motoarele de concepție nouă prescrierea durabilității diferitelor organe este mai greu de făcut. De regulă, durabilitatea se estimează statistic pe baza datelor existente în literatura de specialitate pentru motoare similare și a experienței proiectantului. Cînd acestea nu există, durabilitatea nu se prescrie, urmînd ca datele necesare prescrierii să fie culese din exploatare, de la primul sau primele loturi de motoare în funcționare.

La motoarele de concepție nouă este posibilă estimarea durabilității organelor motorului, în special ale celor care realizează cupluri în frecare, prin realizarea unor probe de durată a motoarelor (pentru stabilirea siguranței de funcționare), pe modelele prototip. În acest sens, în lucrare se prezintă o modalitate de estimare a durabilității pieselor în

* Șef lucrări dr. ing., catedra de Motoare cu ardere internă (Filiala I.N.M.T.)

frecare, prin înregistrarea uzurii acestora în diferite etape ale încercării de stabilire a siguranţei de funcţionare, pentru un motor de concepţie nouă, diesel răcit cu aer, de 7 CP la 3000 rot/min, prototip, membru al familiei de motoare diesele răcite cu aer de 5—55 CP, proiectate la Institutul Naţional de Motoare Termice din Bucureşti, şi destinate antrenării generatoarelor electrice, pompelor de fluid, utilajelor de construcţii, propulsiei ambarcaţiunilor mici etc.

2. Înregistrarea uzurii pieselor în frecare

Motorul supus încercării de stabilitate a probei de siguranţă în funcţionare a fost montat pe un stand echipat cu frînă Schenck. Încercarea s-a derulat pe parcursul a 600 ore de funcţionare repetînd un ciclu de încărcare de 180 minute [7]. După fiecare 200 ore de funcţionare motorul s-a demontat şi s-au efectuat măsurătorile dimensionale, în conformitate cu standardele în vigoare [4], la următoarele piese care realizează cupluri în frecare: cilindru, piston, segmenţi, bolţ, arbore cotit, cuzineţi pentru fusurile palier şi maneton, bucşa bolţului, arbore cu came, bucşele arborelui cu came, supape, ghiduri pentru supape şi tacheţi.

Măsurătorile dimensionale efectuate la începutul probei (zero ore de funcţionare) de stabilire a siguranţei de funcţionare şi după fiecare 200 ore de funcţionare, în aceleaşi condiţii, au permis evaluarea uzurii pieselor mai sus menţionate. Valorile absolute ale uzurii cilindrului, pistonului (în zona mantalei) şi bolţului înregistrate în planele în care s-au efectuat măsurătorile dimensionale, la finele celor 600 ore de funcţionareî precum şi variaţia acesteia în planul care conţine axa principală a pieselor respective, sînt prezentate în fig. 1 ... 3.

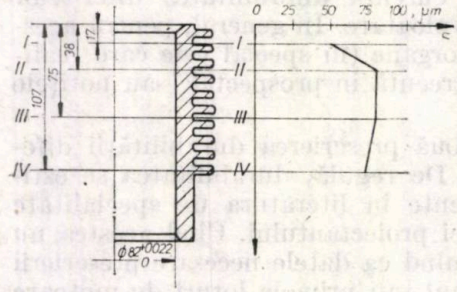


Fig. 1. Uzura cilindrului după 600 ore de funcţionare a motorului

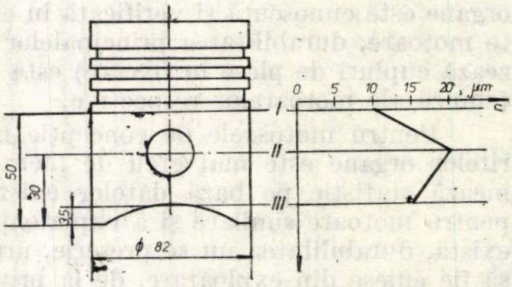


Fig. 2. Uzura mantalei pistonului (piston Mahle) după 600 ore de funcţionare a motorului.

Valorile uzurii medii a pieselor în frecare înregistrate la finele fiecărei etape de cîte 200 ore de funcţionare s-au reprezentat în fig. 4 ... 6, sub forma diagramelor de uzură.

Uzura segmenţilor s-a apreciat atît prin măsurarea rostului de dilatare (fantei) cît şi prin cîntărire. Aprecierea uzurii ţinînd seama de valoarea rostului de dilatare s-a făcut prin calculul valorii diametrului

exterior al segmentului, D_s, în poziția acestuia montat în cilindru, cu relația :

$$D_s = D_c - f/\pi, \tag{1}$$

în care D_c este diametrul cilindrului (în planul în care s-a montat segmentul pentru măsurarea fantei), iar f-fanta segmentului (rezultată în urma uzării atît a cilindrului cît și a segmentului).

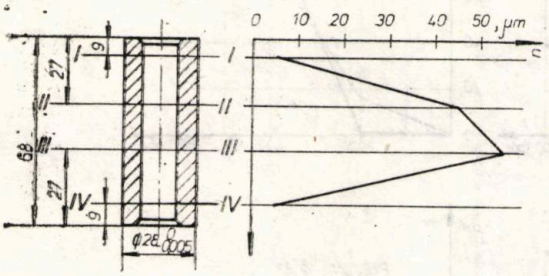


Fig. 3. Uzura bolțului (Mahle) după 600 ore de funcționare a motorului

Valorile măsurate pentru fanta și masa segmenților și cele calculate pentru uzura acestora sînt trecute în tabelul 1.

Tabelul 1

Valori măsurate pentru fanta și masa segmenților și calculate pentru uzura acestora

Etape, ore / Segmentul	0			200			400			600		
	mm	g	μm	mm	g	μm	mm	g	μm	mm	g	μm
I	0,45	14,88	0	0,50	14,65	1	0,80	14,47	91	0,95	14,38	13
II	0,45	15,42	0	0,55	15,29	17	0,75	15,20	59	0,90	15,17	13
III	0,40	16,003	0	1,60	15,83	568	2,30	15,66	118	2,50	15,56	0

Uzura importantă a segmenților, cilindrului (fig. 4), bolțului (în zona de sprijin în piciorul bielei-fig. 4) și cuzinetilor fusurilor palier (fig. 5) se poate datora atît așezării pieselor în altă poziție decît cea inițială, ca urmare a demontărilor motorului efectuate după 200 și respectiv 400 ore de funcționare, ceea ce a dus la modificarea procesului continuu de uzură și a apariției altor condiții de frecare, cît și schimbării uleiului de ungere în intervalul de funcționare a motorului de la 300 la 400 ore.

3. Estimarea durabilității pieselor în frecare

Durabilitatea pieselor în frecare s-a apreciat prin calcul, pe baza diagramelor de uzură din fig 4. ... 6, pornind de la observația că după un timp t_f, uzura are valoarea [1],

$$u_f = u_i + \operatorname{tg}\alpha \cdot (t_f - t_i)^*, \tag{2}$$

în care u_f și u_i sînt uzurile în momentele final și inițial ale măsurătorilor, t_f și t_i — timpii final și inițial în care s-au efectuat măsurătorile (s-a

* În relația (2), t_f și t_i se introduc cu unitatea de măsură a uzurii (μm sau mg), în conformitate cu scara la care s-a făcut reprezentarea curbelor de uzură $u = f(t)$.

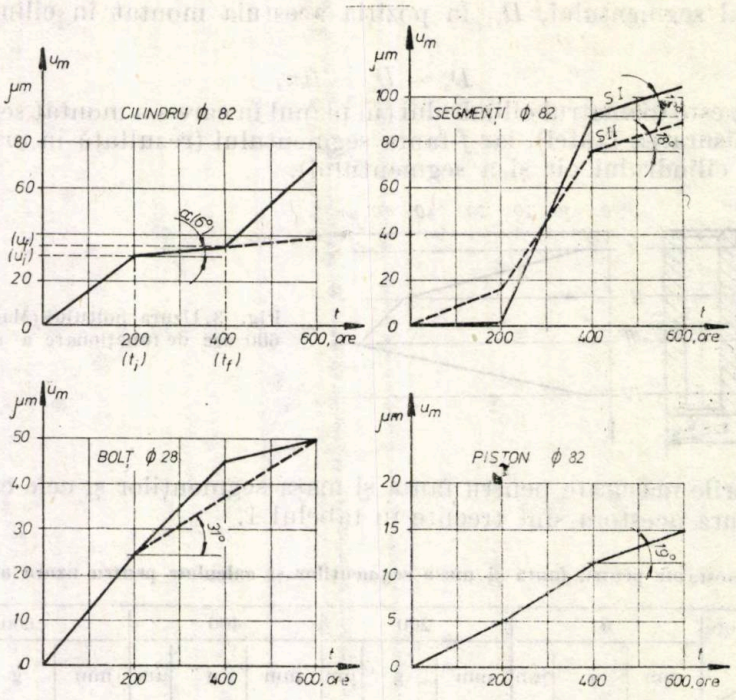


Fig. 4. Diagramele de uzură pentru cilindru, segmenți, piston și bolț după 600 ore de funcționare a motorului.

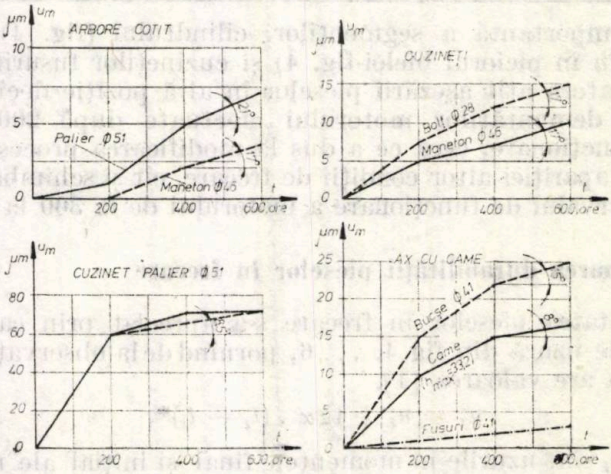


Fig. 5. Diagramele de uzură pentru arborele cotit, cuzineții fusurilor maneton și palier ale arborelui cotit și bucșa din piciorul bielei și axul cu came.

înregistrat uzura), α- unghiul pe care îl face curba de uzură cu abscisa (axa timpului) în momentul de timp t ; unghiul α exprimă viteza de uzare.

În mod obișnuit uzura crește cu durata procesului de frecare, creștere care în general nu se prezintă sub formă liniară [6]. În timpul procesului de uzare, viteza de uzare (cm^3/min; mg/h) variază, fiind dependentă de condițiile de suprafață, de impuritățile mecanice din ulei, de abaterile de formă și poziție ale pieselor în frecare etc. Dacă în timpul procesului de uzare condițiile de suprafață se stabilizează, uzura crește liniar cu timpul, iar viteza de uzare devine constantă [6].

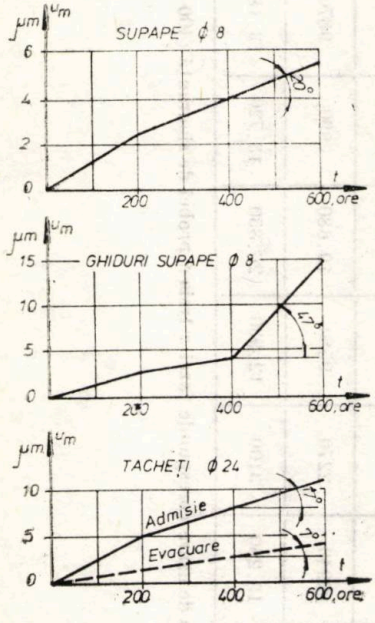


Fig. 6. Diagramele de uzură pentru supape, ghiduri pentru supape și tacheți.

Durabilitatea pieselor în frecare în cazul motorului cercetat s-a apreciat în ipoteza că viteza de uzare este constantă, și, de la caz la caz (v. fig. 4 ... 6), egală ca valoare cu viteza de uzare din ultima etapă de 200 ore de funcționare (400—600 ore) sau cu media ultimelor două etape 200—400 ore; 400—600 ore). Ipoteza poate fi acceptată dacă se are în vedere următoarea verificare : viteza medie de uzare a primului segment de comprimare, în perioada de funcționare 0—600 ore, este de 0,834 mg/h; dacă se aplică relația $D = G/V_u$ [6], se constată că pentru $D =$ =600 ore, cantitatea de metal îndepărtat prin uzare este de 500 mg (v. tab. 1), valoare rezultată și ca urmare a cîntăririi segmentului la 0 și respectiv 600 ore de funcționare.

Pentru calculul durabilității s-a utilizat relația

$$t_f = \frac{u_f - u_i}{\operatorname{tg}\alpha} + t_i, \qquad (3)$$

rezultată din relația (2), în care valoarea lui u_f a fost înlocuită cu valorile uzurilor admisibile, apreciate în conformitate cu datele din literatură [2], [3], [4], pentru motoare similare și valori dimensionale comparabile.

În tabelul 2 sînt centralizate valorile calculate pentru durabilitatea pieselor în frecare ale motorului cercetat, pentru patru valori impuse uzurii admisibile.

Analiza durabilităților estimate (tab. 2) pune în evidență o plajă foarte largă a valorilor acestora; pentru o uzură admisibilă de 0,1 mm, de exemplu, limita inferioară este de 525 ore pentru segmentul de comprimare și de peste 10.000 ore pentru arborele cotit și arborele cu came. O astfel de estimare permite clasificarea pieselor pe grupe de durabilitate și

Tabelul 2

Durabilitatea pieselor în frecare în funcţie de uzura admisă, la monocilindrul diesel răcit cu aer, de 7 CP la 3000 rot/min, ore

Piesa / u_{ad} (μ_m)	Cilindru * Ø $82^{+0,022}_{0}$	Piston (Mahle) Ø 81,879 ± 0,01	Segment (Mahle) de comprimare	Arbore cotit		Cuzineţi		Bolţ (Mahle) Ø $28^{0}_{-0,005}$	Bucşă picior bielă Ø $28^{+0,020}_{+0,008}$	Ax cu came(h_{max}) $33,2^{-0,050}_{-0,112}$	Bucşă ax came Ø 41 ±0,012	Tacheţi Ø $24^{-0,007}_{-0,020}$	Supape Ø $8^{0}_{-0,022}$	Ghiduri supape Ø $8^{+0,038}_{+0,023}$
				Palier Ø $50,8^{0}_{-0,01}$	Maneton Ø $46^{0}_{-0,016}$	Palier Ø $50,85^{+0,03}_{0}$	Maneton Ø 46,048 ±0,06							
50	1080 (480)	2640	310	5080	8000	17	3260	600	2930	5380	2480	2560	3050	2425
100	3625 (750)	7550	525	10.300	13.400	1570	6700	1430	6260	12.540	6220	6530	5800	5150
150	5850 (1015)	8460	1295	15.600	20.500	3240	9940	2270	9580	19.680	9990	9870	8580	7850
200	8210 (1285)	11.370	2065	20.700	26.400	4920	13.250	3100	12.930	26.850	13.720	13.180	11.280	10.500

* Valorile din paranteze sînt calculate în ipoteza că viteza de uzare corespunde fazei a treia a probei de siguranţă (400—600 ore, v.Fig.4).

precizarea perioadei de înlocuire a pieselor cu durabilitate mai mică, astfel încît, pe ansamblul motorului să se mențină în funcționare piesele cu durabilitate mai mare. Devine, astfel, posibilă estimarea perioadei de funcționare pînă la intrarea motorului în reparație capitală și chiar a duratei totale de funcționare a motorului.

4. Concluzii

Pentru motoarele noi ce urmează să intre în fabricația curentă a interprinderilor de profil, estimarea durabilității principalelor piese în frecare, pe modelele prototip, încă din faza de pregătire a fabricației, reprezintă, alături de performanțele energetice, o informație cu pondere esențială în perfectarea contractelor cu viitorii beneficiari.

Durabilitatea pieselor în frecare estimată pe baza înregistrării uzurii acestora în timpul probelor de stabilire a siguranței de funcționare a motoarelor prototip, urmează să fie corectată cu datele culese din exploatarea motoarelor. Pînă atunci, modalitatea de estimare prin calcul a durabilității, expusă în lucrare, oferă singurele informații exacte cu privire la valorile durabilității pieselor în frecare, perioadele de înlocuire a pieselor cu durabilitate mică, perioada de funcționare pînă la intrarea motorului în repartiție capitală și chiar la durata totală de funcționare a motorului.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Climov*, Încercarea motoarelor diesel de tracțiune feroviară. Editura Transporturilor și Telecomunicațiilor, București, 1962.
2. x x x Ersatzteilliste Deutz F 2L 912, F 2L 912 W. Klöckner-Humboldt-Deutz AG, 297 1493, GF 0150—99.
3. *P. Hofbauer, K. Stator*, Advanced Automative Power Systems. Part 2 : A Diesel for a Subcompact Car, paper 770113.
4. x x x Lombardini Service. Mod. 50.022—5/79, 5302.17.
5. x x x Motoare staționare cu aprindere prin comprimare. Metode de încercare. STAS 7140/65
6. *D. Pavelescu ș. a.*, Tribologie, Editura Didactică și Pedagogiă, București, 1977.
7. *T. Turcoiu*, Cu privire la stabilirea siguranței de funcționare a motorului diesel răcit cu aer, cu alezajul de 82 mm (pentru care nu există reglementări standard). În volumul celei de a IV-a Sesiuni de comunicări științifice a INMT, București, 24—25 nov. 1983.

A modality of Estimation to Length of Life of the Pieces in the Friction at the New Conception Internal Combustion Engines.

The paper presented a modality of estimation to length of life of the pieces in the friction, through calculation, on based their wear registring in the time of the length test. Was used a new conception Diesel engine air cooled, of 5,15 kW at 3000 rpm.

C.Z. :66.02 :620.178

ASUPRA CONCENTRĂRII DE TENSIUNI IN ZONA DE IMBINARE A DOUĂ VIROLE CILINDRICE CU ABATERI DE FORMĂ

R. I. IATAN, MIHAELA I. PĂUNESCU, C. TACĂ*

În lucrare se analizează stările de tensiuni și de deformații în zona de îmbinare a două virole cilindrice care au abateri de la geometria ideală, sub forma unor excentricități ale suprafețelor mediane.

Exemplificarea rezultatelor teoretice se face pe cazul a două virole cilindrice cu aceeași grosime a peretelui.

În etapa actuală, de economisire pregnantă a energiei, se pune tot mai mult problema evaluării exacte a stărilor de tensiuni și de deformații în zonele cele mai solicitate ale construcțiilor. Această stare de lucruri se impune atît pentru reducerea consumului de materiale de construcție cît și pentru simplificarea soluțiilor și a punerii în operă a utilajelor. Pe de altă parte se urmărește creșterea continuă a indicilor de fiabilitate, pătrunzînd tot mai mult în intimitatea comportării sub sarcină a materialelor de construcție.

În lucrarea de față, autorii au în vedere analiza stării de tensiuni și de deformații în zona de îmbinare a două virole cilindrice cu suprafețe mediane geometric diferite. Această situație se poate întîlni atît în cazuri voite cît și în cazuri cu abateri de formă (spre exemplu la îmbinarea a două virole cilindrice cu aceeași grosime a pereților).

Expresiile sarcinilor de legătură

Acceptînd ipotezele simplificatoare de calcul, din domeniul învelișurilor de revoluție, și luînd în considerație figura 1, pentru evaluarea stărilor de tensiuni și de deformații în zona de îmbinare a celor două virole 1 și 2 (menționate) este necesar să se stabilească, în primul rînd, valorile sarcinilor de legătură P_{01} și M_{01}, figura 2 Acest lucru este posibil, aici, prin adoptarea continuității deformațiilor-deplasări radiale și rotații. Ecu-

---

* Șef lucrări dr. ing., șef lucrări ing., Asistent ing., catedra Utilaj tehnologic chimic

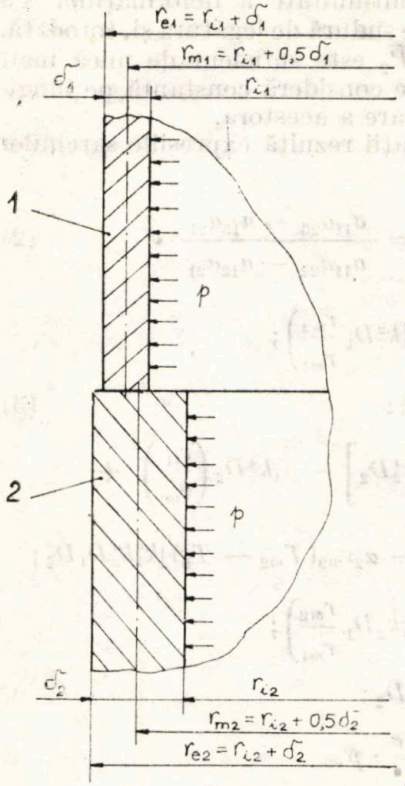


Fig. 1

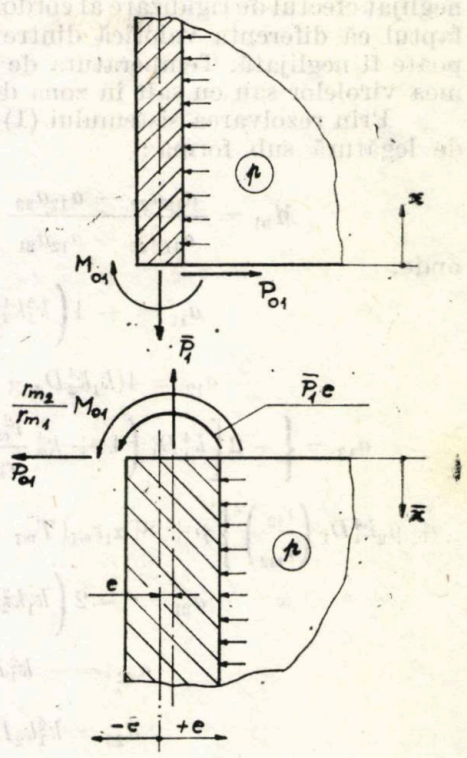


Fig. 2

ațiile corespunzătoare (pentru $x = 0$, $\bar{x} = 0$, fig. 2) se prezintă sub orma :

$$-\frac{p}{4k_1^4 D_1} + \frac{\mu_1 r_{i1}^2 p}{8k_1^4 D_1 r_{m1}^2} - \alpha_1 r_{m1}(T_{m1} - T_0) - \frac{1}{2k_1^2 D_1} M_{01} +$$

$$+ \frac{1}{2k_1^3 D_1} P_{01} = -\frac{p}{4k_2^4 D_2} + \frac{\mu_2 r_{i2}^2 p}{8k_2^4 D_2 r_{m2}^2} - \alpha_2 r_{m2}(T_{m2} - T_0) -$$

$$- \frac{1}{2k_2^2 D_2} \cdot \frac{r_{m2}}{r_{m1}} \cdot M_{01} - \frac{r_{i2}^2 p}{4k_2^2 D_2 r_{m2}} \cdot e - \frac{1}{2k_2^3 D_2} \cdot P_{01}; \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{k_1 D_1} M_{01} + \frac{1}{2k_1^2 D_1} P_{01} = \frac{1}{k_2 D_2} \cdot \frac{r_{m2}}{r_{m1}} \cdot M_{01} + \frac{1}{2k_2^2 D_2} \cdot P_{01} +$$

$$+ \frac{r_{i2}^2 \cdot p}{2k_2 D_2 r_{m2}} \cdot e.$$

Pentru scrierea ecuațiilor (1) de continuitate a deformațiilor s-a neglijat efectul de rigidizare al cordonului de sudură de legătură și, totodată, faptul că diferența valorică dintre $\bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$ este suficient de mică încît poate fi neglijată. Temperatura de lucru se consideră constantă pe lungimea virolelor sau cu salt în zona de îmbinare a acestora.

Prin rezolvarea sistemului (1) de ecuații rezultă expresiile sarcinilor de legătură sub forma :

$$M_{01} = \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \; ; \; P_{01} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \, , \tag{2}$$

unde,

$$a_{11} = -4\left(k_1^2 k_2^4 D_2 - k_1^4 k_2^2 D_1 \frac{r_{m2}}{r_{m1}}\right);$$

$$a_{12} = 4(k_1 k_2^4 D_2 + k_1^4 k_2 D_1); \tag{3}$$

$$a_{13} = \left\{-2\left[k_1^4 D_1\left(1 + k_2^2 \frac{r_{i2}^2 e}{r_{m2}}\right) - k_2^4 D_2\right] - \mu_1 k_2^4 D_2 \left(\frac{r_{i1}}{r_{m1}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \mu_2 k_1^4 D_1 \left(\frac{r_{i2}}{r_{m2}}\right)^2\right\} p + 8[\alpha_1 r_{m1}(T_{m1} - T_0) - \alpha_2 r_{m2}(T_{m2} - T_0)] k_1^4 k_2^4 D_1 D_2 ;$$

$$a_{21} = -2\left(k_1 k_2^2 D_2 + k_1^2 k_2 D_1 \frac{r_{m2}}{r_{m1}}\right);$$

$$a_{22} = -k_1^2 D_1 + k_2^2 D_2 ;$$

$$a_{23} = k_1^2 k_2 D_1 \cdot \frac{r_{i2}^2 \cdot e}{r_{m2}} \cdot p.$$

Pentru virole cu aceeași grosime, relațiile anterioare se modifică în mod corespunzător, avînd în vedere că, în acest caz, $D_1 = D_2$. Pentru același material de construcție, $\mu_1 = \mu_2$ resepectiv $\alpha_1 = \alpha_2$.

Stări de tensiuni

Sub acțiunea sarcinilor exterioare și a celor de legătură, în cele două virole se dezvoltă tensiunile :

— *pentru virola cilindrică 1,*

$$\sigma_{11}(x) = \frac{p \cdot r_{m1}}{2\delta_1} \pm \frac{6\mathcal{M}_{01}^{(1)}}{\delta_1^2}; \tag{4}$$

$$\sigma_{21}(x) = \frac{p \cdot r_{m1}}{\delta_1} \pm \frac{6\mu_1 \mathcal{M}_{01}^{(1)}}{\delta_1^2} + \frac{\mathcal{T}^{(1)}}{\delta_1},$$

unde

$$\mathcal{M}_{01}^{(1)} = {}^{(m)}M_{01}(x)_1 + {}^{(p)}M_{01}(x)_1 = M_{01}(\cos k_1 x + \sin k_1 x) e^{-k_1 x}$$

$$- \frac{1}{k_1} P_{01} \cdot e^{-k_1 x} \cdot \sin k_1 x ; \tag{5}$$

$$\mathcal{T}^{(1)} = 2k_1 r_{m1}[k_1 M_{01}(\cos k_1 x - \sin k_1 x)\, e^{-k_1 x} - P_{01} e^{-k_1 x} \cdot \cos k_1 x] ;$$

— *pentru virola cilindrică 2,*

$$\sigma_{12}(\overline{x}) = \frac{p r_{m2}}{2\delta_2} \pm \frac{6\mathcal{M}_{01}^{(2)}}{\delta_2^2};$$

$$\sigma_{22}(\overline{x}) = \frac{p\, r_{m2}}{\delta_2} \pm \frac{6\mu_2 \mathcal{M}_{01}^{(2)}}{\delta_2^2} + \frac{\mathcal{T}^{(2)}}{\delta_2}, \tag{6}$$

unde

$$\mathcal{M}_{01}^{(2)} = {}^{(m)}\mathrm{M}_{01}(\overline{x})_2 + {}^{(p)}\mathrm{M}_{01}(\overline{x})_2 = \left(M_{01}\frac{r_{m2}}{r_{m1}} + \overline{P}_1 e\right) \cdot$$

$$\cdot (\cos k_2\overline{x} + \sin k_2\overline{x}) e^{-k_2\overline{x}} - \frac{1}{k_2} P_{01} e^{-k_2\overline{x}} \cdot \sin k_2\overline{x}; \tag{7}$$

$$\mathcal{T}^{(2)} = 2k_2 r_{m2}\left[k_2\left(M_{01}\frac{r_{m2}}{r_{m1}} + \overline{P}_1 \cdot e\right)(\cos k_2\overline{x} - \sin k_2\overline{x}) e^{-k_2\overline{x}} - \right.$$

$$\left. - P_{01} e^{-k_2\overline{x}} \cdot \cos k_2\overline{x}\right]$$

Respectînd sensurile momentelor încovoietoare unitare indicate în figura 2, semnul (+), respectiv (−), din egalitățile (4) și (6) se adoptă pentru suprafața interioară (întinsă), respectiv suprafața exterioară (comprimată) a virolelor cilindrice.

Tensiunile echivalente se calculează cu relații de forma:

$$\sigma_{\mathrm{ech}\,j} = (\sigma_{1j}^2 + \sigma_{2j}^2 - \sigma_{1j}\sigma_{2i})^{0,5}; \quad j = 1,\ 2, \tag{8}$$

conform teoriei energiei de deformare, sau

$$\overline{\sigma}_{\mathrm{ech}j} = \max(\sigma_{1j};\ \sigma_{2j}), \tag{9}$$

conform teoriei tensiunilor tangențiale maxime.

Avînd în vedere concentrarea locală de tensiuni, se poate accepta construcția pentru care $\sigma_{\mathrm{ech}j} \leqslant \sigma_a$, respectiv $\overline{\sigma}_{\mathrm{ech}j} \leqslant \sigma_a$ sau pentru o utilizare mai eficientă a materialelor de construcție $\sigma_{\mathrm{ech}j} \leqslant \overline{\sigma}_a$, respectiv $\overline{\sigma}_{\mathrm{ech}j} \leqslant \overline{\sigma}_a$.

Stări de deformații

Pentru cotele curente x, $\overline{x}$, menționate în cele ce preced, deplasările radiale $w_1(x)$, $w_2(\overline{x})$ și rotațiile $\theta_1(x)$, $\theta_2(\overline{x})$ se prezintă sub forma:

— *pentru virola cilindrică 1,*

$$w_1(x) = -\frac{p}{4k_1^4 D} + \frac{\mu_1 r_{i1}^2 p}{8k_1^4 D_1 r_{m1}^2} - \alpha_1 r_{m1}(T_{m1} - T_0) -$$

$$- \frac{1}{2k_1^2 D_1}\mathcal{M}_{01}^{(1)} + \frac{1}{2k_1^2 D_1}\mathcal{P}_{01}^{(1)}; \tag{10}$$

$$\theta_1(x) = -\frac{1}{k_1 D_1}\mathcal{M}_{01}^{(1)} + \frac{1}{2k_1^2 D_1}\mathcal{P}_{01}^{(1)};$$

$$\mathcal{P}_{01}^{(1)} = -2k_1 M_{01} e^{-k_1 x}\sin k_1 x + P_{01}\, e^{-k_1 x}(\cos k_1 x - \sin k_1 x);$$

— *pentru virola cilindrică 2,*

$$w_2(\bar{x}) = -\frac{p}{4k_2^4 D_2} + \frac{\mu_2 r_{i2}^2 p}{8k_2^4 D_2 r_{m2}^2} - \alpha_2 r_{m2}(T_{m2} - T_0) -$$

$$-\frac{1}{2k_2^2 D_2}\mathcal{M}_{01}^{(2)} - \frac{1}{2k_2^3 D_2}\mathcal{P}_{01}^{(2)};$$

$$\theta_2(\bar{x}) = \frac{1}{k_2 D_2}\mathcal{M}_{01}^{(2)} + \frac{1}{2k_2^2 D_2}\mathcal{P}_{01}^{(2)};$$

$$\mathcal{P}_{01}^{(2)} = 2k_2\left(\frac{r_{m2}}{r_{m1}} M_{01} + \bar{P}_1 e\right) e^{-k_2\bar{x}}\sin k_2\bar{x} +$$

$$+ P_{01}\, e^{-k_2\bar{x}}(\cos k_2\bar{x} - \sin k_2\bar{x}).$$

Exemplificare

Pentru concretizarea numerică a rezultatelor teoretice deduse în cele ce preced, se consideră îmbinarea a două virole cilindrice pentru care: $r_{i1} = r_{i2} = 2\,\text{m}$; $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}010$ m; $T_0 = 20°\text{C}$; $T_{m1} = T_{m2} = 100°\text{C}$; $p = 0{,}8$ MPa; materialul de construcție oțel R 52 STAS 2883/2 — 80, pentru care $\sigma_r = 510$ MPa, $\sigma_c^{20°} = 350$ MPa, respectiv $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}[°\text{C}]^{-1}$; $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$. Se consideră, în continuare, excentricități ale suprafeței mediane a virolei ciindrice 2, în raport cu a virolei cilindrice 1, cu valorile indicate în figurile 3 și 4, unde se prezintă, totodată, și valorile tensiunilor echivalente, calculate cu relații de forma (8). Prin analizarea graficelor prezentate în figurile 3 și 4 se constată că pentru excentricități pozitive (deci virolei 1), suprafața interioară a virolei 2, respectiv suprafața exterioară a virolei 1 sînt cele mai solicitate. Valorile tensiunilor echivalente maxime rămîn totuși sub nivelul limitei convenționale de curgere de 295 MPa la temperatura de lucru de 100°C. Atunci cînd cilindrul 2 are diametrul mai mare decît cilindrul 1 solicitările cele mai mari se găsesc la suprafața interioară a virolei 1, respectiv suprafața exterioară a virolei 2.

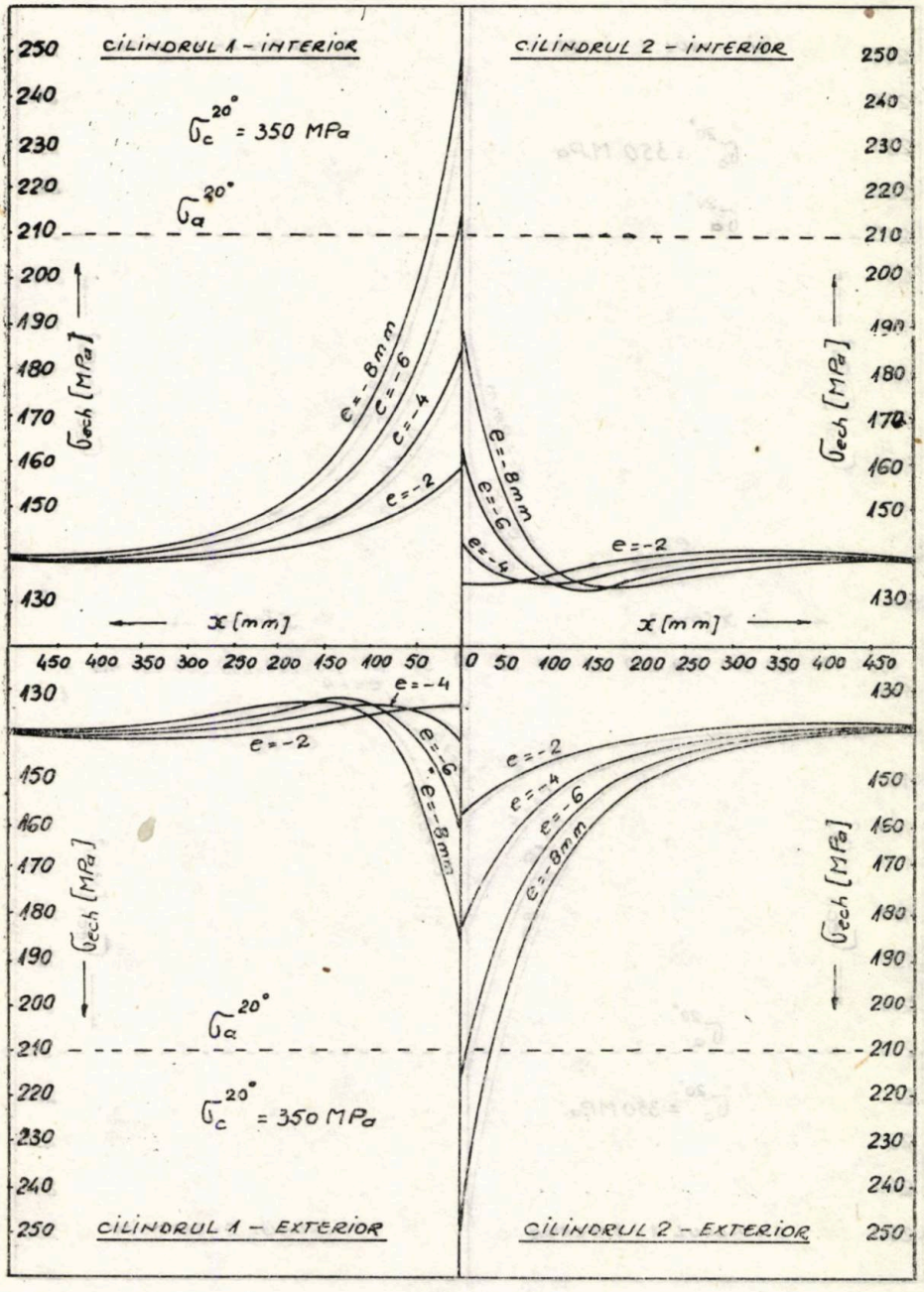

CILINDRUL 1 - INTERIOR
CILINDRUL 2 - INTERIOR
$\sigma_c^{20°}$ = 350 MPa
$\sigma_a^{20°}$
σ_{ech} [MPa]
x [mm]
e=-8mm
e=-6
e=-4
e=-2
CILINDRUL 1 - EXTERIOR
CILINDRUL 2 - EXTERIOR

Fig. 3

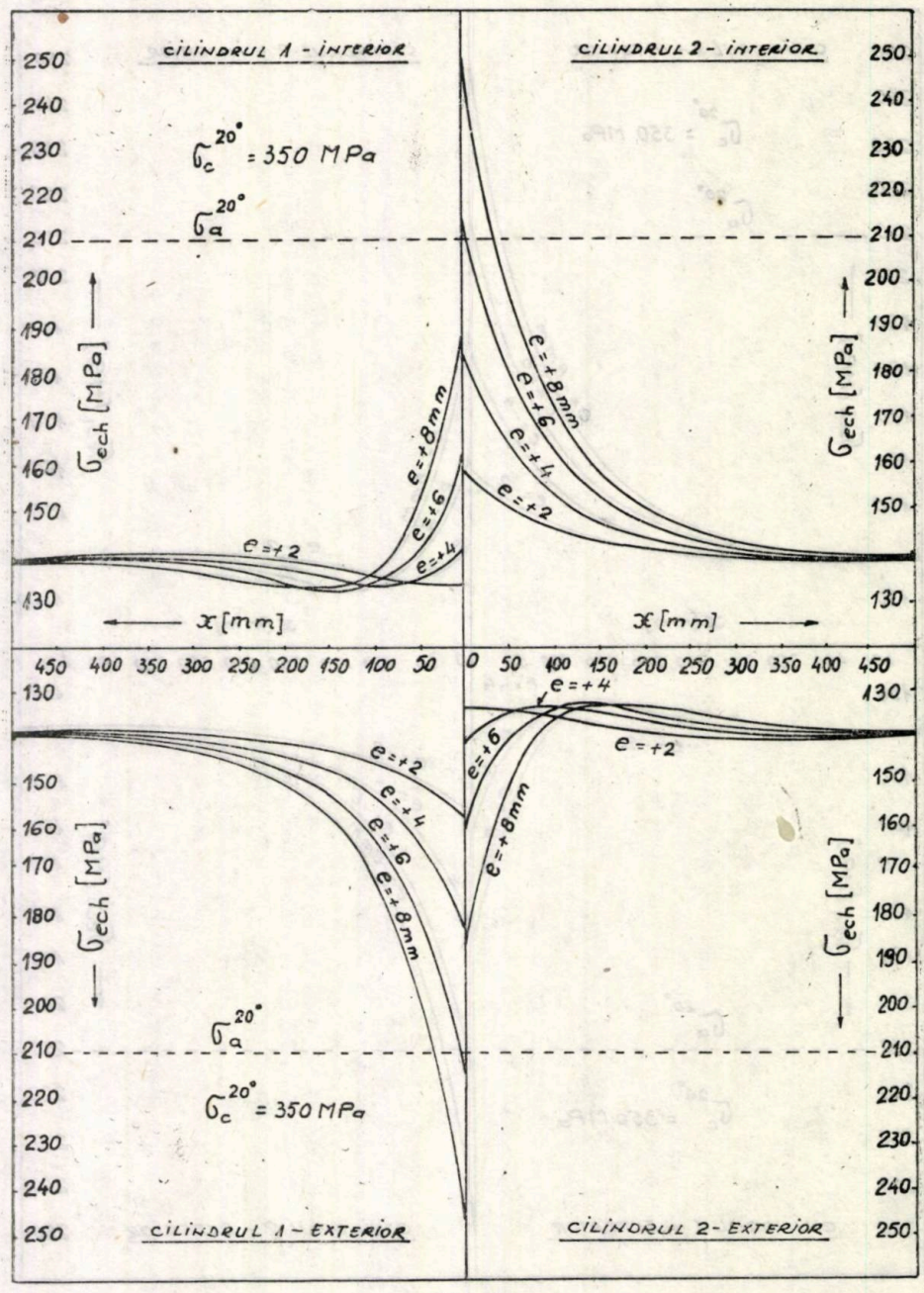

CILINDRUL 1 - INTERIOR
CILINDRUL 2 - INTERIOR
$\sigma_c^{20^\circ}$ = 350 MPa
$\sigma_a^{20^\circ}$
σ_{ech} [MPa]
x [mm]
e=+2
e=+4
e=+6
e=+8mm
CILINDRUL 1 - EXTERIOR
CILINDRUL 2 - EXTERIOR

Fig. 4

Concluzii

În lucrare se prezintă stările de tensiuni și de deformații în zona de îmbinare a două virole cilindrice, între ale căror suprafețe mediane există o anumită excentricitate e, considerată ca o abatere de la geometria ideală. Se neglijează, în acest caz, efectul de rigidizare al cordonului de sudură necesar îmbinării celor două elemente constructive menționate, urmînd ca acesta să fie luat în considerație într-o lucrare ulterioară.

Relațiile obținute permit stabilire valorilor tensiunilor echivalente și compararea acestora cu valorile admisibile prescrise de către proiectant. Metoda de calcul expusă se recomandă a fi utilizată pentru evaluarea excentricităților maxime admisibile caracteristice unor construcții de genul celor menționate. Exemplificările realizate vin să ilustreze modalitatea de lucru cu metoda de calcul expusă și deciziile adoptate.

Notații

r_{i1}, r_{i2} — razele suprafețelor interioare ale virolelor cilindrice;
r_{m1}, r_{m2} — razele suprafețelor mediane ale virolelor cilindrice;
δ_1, δ_2 — grosimile pereților virolelor cilindrice;
p — presiunea interioară;
k_1, k_2 — factori de amortizare a sarcinilor, ale căror expresii se prezintă sub forma

$$k_i = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu_i^2)}}{\sqrt{r_{mi}\delta_i}}; \quad i = 1, 2;$$

D_1, D_2 — rigiditățile cilindrice la încovoiere, calculate cu relațiile:

$$D_i = \frac{E_i \delta_i^3}{12(1-\mu_i^2)}; \quad i = 1, 2;$$

μ_i — coeficientul contracției transversale a materialelor de construcție a virolelor ($i = 1, 2$);
E_i — modulul de elasticitate longitudinală al materialului de construcție ($i = 1, 2$);
α_i — factori de dilatare liniară a materialelor de construcție ($i = 1, 2$);
T_{mi} — temperaturile suprafețelor mediane ale virolelor cilindrice, în timpul exploatării;
T_0 — temperatura mediului ambiant, la asamblarea virolelor;
P_{01}, M_{01} — efortul tăietor și momentul încovoietor unitar de legătură;
e — excentricitatea dintre suprafețele mediane ale virolelor cilindrice, considerată pozitivă sau negativă în relațiile (1), așa cum se exprimă în figura 2; suprafața mediană a virolei 1 se consideră ca referință;
a_{jt} — factori de influență, calculați cu expresii de forma (3); ($j = 1, 2, 3$; $t = 1, 2, 3$);
$\sigma_{11}(x)$, $\sigma_{12}(\bar{x})$ — tensiuni axiale, calculate cu expresii de forma (4a), (6a), în funcție de distanțele curente x, $\bar{x}$ (fig. 2);
$\sigma_{21}(x)$, $\sigma_{22}(\bar{x})$ — tensiuni inelare, calculate cu expresii de forma (4b), (6b), în funcție de distanțele curente x, $\bar{x}$;
$\mathcal{M}_{01}^{(i)}$, $\mathcal{T}^{(i)}$ — momente încovoietoare unitare și efoturi inelare, calculate cu relații de forma (5) și (7), ($i = 1, 2$);
σ_a — tensiunea admisibilă pentru materialul de construcție a virolelor cilindrice ($\sigma_a = \max(\sigma_c^T/c_c;\ \sigma_r/c_r)$);
σ_c^t — limita convențională de curgere a materialului de construcție, la temperatura de lucru, T;

σ_r — rezistența de rupere a materialului de construcție;

c_c, c_r — coeficienți de siguranță față de limita de curgere și de rezistența de rupere a materialului de construcție;

$\overline{\sigma_a}$ — tensiunea admisibilă pentru materialul de construcție;

$$(\overline{\sigma_a} = 3\sigma_a = 2\sigma_c);$$

$\bar{P}_1$ — efort axial, calculat cu relația : $0{,}5\, pr_{i1}^2 / r_{m1}$;

$\bar{P}_2$ — efort axial, calculat cu relația : $0{,}5\, p\, r_{i2}^2 / r_{m2}$.

On Stress Concentration in the Jointing Zone of Two Cylindrical Shells Presenting Shape Imperfections

The analysis of stress and deformations in the jointing zone of two cylindrical shells with geometric form imperfections which appear as eccentricities of median surfaces, is presented in the paper.

Theoretical results are exemplified for the case of two cylindrical shells with the same wall thickness.

C.Z. :621.436.662.75

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ALE EMULSIEI MOTORINĂ-METANOL, PREPARATE DE INSTALAȚIA DE ALIMENTARE A UNUI MOTOR DIESEL

D. NEDELCU, N. APOSTOLESCU*

Emulsia metanol-motorină preparată mecanic de instalația de alimentare a unui motor diesel a fost studiată de autori cu ajutorul unui traductor electric rezistiv și pe cale optică. Cercetările au evidențiat existențaunui domeniu în care metanolul este faza dispersă în motorină, pînă la proporția limită de metanol de 37%, după care situația este inversă. Gradul de dispersie al emulsiei metanol în motorină scade la creșterea turației și sarcinii, sau a proporției de metanol.

1. Introducere

La Catedra de Motoare cu ardere internă a Institutului Politehnic București, au fost efectuate cercetări privind utilizarea metanolului drept combustibil în motoarele cu aprindere prin comprimare [1], [2], [3], [4].

În acest sens a fost concepută și realizată o instalație originală pentru alimentarea cu emulsie motorină-metanol a motorului diesel de autocamion D-2156-HMN-8 [15], [16], [7].

Emulsia motorină-metanol este preparată mecanic de către instalația de alimentare imediat înaintea injecției acesteia în motor, fără a folosi emulgatori tensioactivi. Utilizarea în condiții favorabile a emulsiei în motor impune cunoașterea proprietăților acesteia. În literatura de specialitate acest tip de emulsie nu este tratată în mod special, cum ar fi de exemplu emulsia motorină-apă.

Datorită complexității procesului de emulsionare la nivelul instalației de alimentare a motorului, aprecierea prin calcul a caracteristicilor emulsiei motorină-metanol nu este indicată.

Pentru determinarea structurii și propretăților acestei emulsii s-a apelat la metode experimentale : analiza electrică, optică și prin sedimentare.

În cele ce urmează se prezintă aceste procedee experimentale, ce au fost utilizate pentru determinarea structurii emulsiei preparate de instalația de alimentare a motorului, împreună cu rezultatele obținute.

* Asist. dr. ing.; Prof. dr. ing., catedra Motoare cu ardere internă

2. Investigația electrică

În scopul determinării conductivității electrice a emulsiei, pe traseul de înaltă presiune al echipamentului de injecție a fost realizat un traductor rezistiv *TR* care să reziste la presiuni de ordinul sutelor de bari. O secțiune prin acest traductor este prezentată în fig. 1. Electrodul *E* este montat prin intermediul izolatorului electric *IE* în corpul traductorului *CT*. Strîngerea electrodului se realizează cu racordul *R* în care se introduce conductorul ecranat coaxial pentru transmiterea semnalului electric. Pentru a putea fi montat pe traseul de înaltă presiune, traductorul este prevăzut cu filet la ambele capete. Montajul în cadrul căruia a fost utilizat traductorul este prezentat în fig. 2.

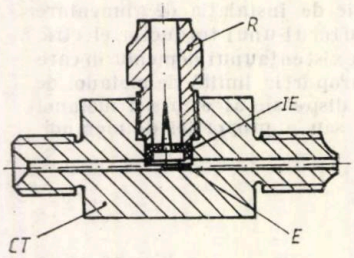


Fig. 1

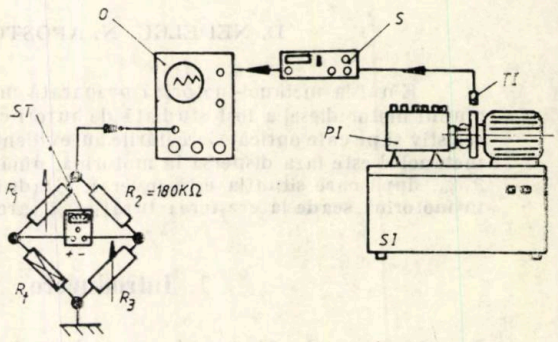


Fig. 2

Traductorul rezistiv simbolizat prin rezistența R_t este legat într-o punte împreună cu rezistențele R_1, R_2 și R_3. Alimentarea punții de măsură se realizează cu ajutorul unei surse stabilizate de tensiune continuă ST de tip I-4103. Semnalul tensiune este aplicat la intrarea osciloscopului catodic *O*, tip Philips PM-3231. Pentru sincronizare se folosește semnalul produs de traductorul inductiv *TI* care se introduce în stroboscopul *S* tip N-2601, utilizat ca defazor, de unde se aplică osciloscopului *O*. Pompa de injecție PI cu instalația de alimentare completă se află montată pe standul de injecție *SI*.

Cu ajutorul acestei instalații s-au obținut informații despre conductivitatea emulsiei, aceasta fiind proporțională cu $1/R_t$.

Măsurătorile au fost efectuate pe tot domeniul de sarcină și turație pentru concentrația emulsiei, $K < 40\%$. S-a constatat că, conductivitatea electrică a emulsiei nu variază cu sarcina și turația.

Reprezentarea grafică a inversului rezistenței traductorului $1/R_t$ este prezentată în figura 3. Se constată că pentru valori ale proporției de metanol din emulsie cuprinse între 0 și 37%, conductivitatea electrică este aproape nulă. Se presupune astfel că pe acest domeniu, motorina reprezintă faza continuă, metanolul fiind dispersat. Pentru valori ale proporției de metanol mai mari de 37%, conductivitatea electrică a emul-

siei este pozitivă și crește liniar cu procentul de metanol. Deoarece emulsia pe acest domeniu este bună conducătoare de electricitate, se presupune că în acest caz metanolul este faza continuă și motorina faza dispersă. Creșterea conductivității electrice cu procentul de metanol se poate explica prin sporirea proporțională a numărului de sarcini electrice mobile (ioni), care determină creșterea curentului între electrozii traductorului.

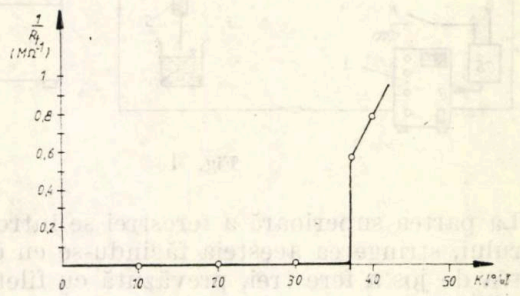


Fig. 3

Măsurarea semnalului de tensiune făcîndu-se cu osciloscopul catodic, s-a putut evidenția clar inversarea fazelor emulsiei pentru $K = 37\%$, mărirea semnalului avînd două nivele fixe, cel ridicat pentru metanol dispersat în motorină și cel coborît pentru motorină dispersată în metanol.

3. Investigația optică

Examinarea optică a emulsiei obținută la ieșirea din injector s-a făcut utilizînd montajul din fig. 4.

Cu ajutorul aparatului fotografic *AF* avînd obiectivul *O* montat la distanță, s-au obținut imagini ale peliculei de emulsie aflate în fereastra optică *FO*, mărite de 16 ori. Iluminarea peliculei de emulsie s-a făcut prin transmisie utilizînd lampa stroboscopică *LS* și stroboscopul *S*, care este utilizat și ca defazor pentru semnalul primit de la traductorul inductiv *TI*.

Pentru înregistrarea fotografică de imagini în diferite momente ale ciclului, în raport cu momentul injecției, s-a utilizat declanșarea sincronizată a aparatului foto. În acest scop, s-a realizat un circuit de sincronizare *CS* prin intermediul căruia se comandă electromagnetul *EM* în urma acționării contactului *K*.

Pompa de injecție *PI* (fig. 4) montată pe standul de injecție *SI* alimentează cu emulsie motorină-metanol injectorul *I*. Datorită vitezei mari de curgere la ieșirea din injector și regimului nestaționar, în interiorul ferestrei *FO* apar goluri, care deranjează imaginea. Din acest motiv s-a utilizat supapa *S* și conducta elastică *CE*, pentru presurizarea ferestrei optice, la o presiune de ~ 10 bari.

Figura 5 prezintă o secțiune prin fereastra optică realizată special pentru a fi montată la ieșirea din injector și care să reziste la o presiune de ~ 25 bari.

În corpul ferestrei *CE* se află montate două discuri din sticlă optică *SO*, prelucrate din lamă de microscop. Acestea sînt fixate cu ajutorul bucșei filetate *D*, în așa fel încît formează între ele un spațiu de 0,3 mm grosime. Pentru etanșare, s-au utilizat inelele *IE* din material plastic.

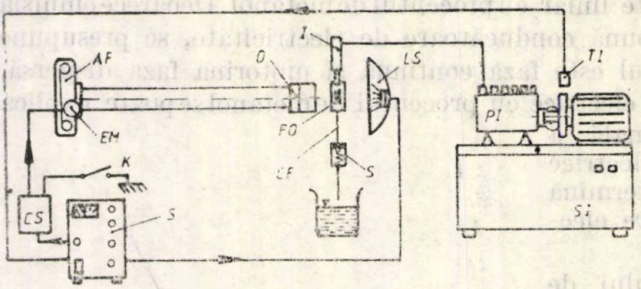


Fig. 4

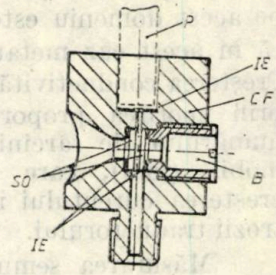


Fig. 5

La partea superioară a ferestrei se introduce pulverizatorul P al injectorului, strîngerea acesteia făcîndu-se cu doi tiranți nereprezentați. În partea de jos a ferestrei, prevăzută cu filet, se racordează conducta elastică CE (fig. 4),

Examinarea optică a emulsiei motorină-metanol, cu ajutorul instalației prezentate a condus la evidențierea aceleiași proporții limită $K_1 = 37\,\%$ de inversare a fazelor. Investigația s-a desfășurat fără a colora metanolul din emulsie. Din acest motiv recunoașterea tipului emulsiei s-a făcut ținînd cont de mobilitatea particulelor dispersate, care se modifică mult la schimbarea fazei continue, cunoscut fiind raportul mare între viscozitățile motorinei și metanolului (~ 10).

În fig. 6 se prezintă două imagini ale peliculei de emulsie obținute în fereastra optică, pentru o proporție de metanol $K = 37\,\%$, la o turație a pompei de injecție $n = 400$ rot/min și un debit de emulsie $Q_e = 2$ cm^3/s. Temperatura emulsiei a fost ~ 25 C.

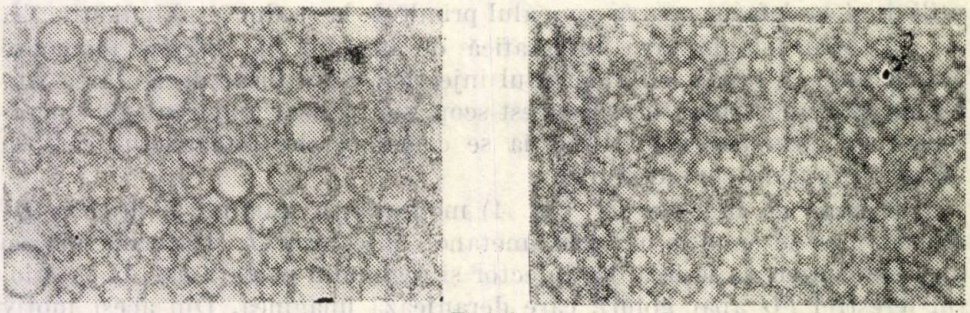


Fig. 6

Imaginea *a* reprezintă emulsia cu fază continuă motorina, iar *b* emulsia cu faza continuă metanol. Diametrele medii ale particulelor dispersate obținute din cele două cazuri sînt :

— metanol dispersat $D_{pm} \simeq 90$ μm
— motorină dispersată $D_{pd} \simeq 40$ μm

La reducerea proporției de metanol față de $K = K_1$ s-a constatat creșterea accentuată a gradului de dispersie. Încercarea de a obține imagini ale emulsiei cu grad de dispersie sporit, nu a fost posibilă datorită feno-

menului de dispersie a luminii prin medii eterogene, care a condus la întunecarea imaginii și reducerea clarității ei.

4. Investigația prin sedimentare

Pentru determinarea sensului de variație al gradului de dispersie Δ, al emulsiei motorină-metanol preparate în instalația de alimentare a motorului, s-a utilizat metoda timpului de separare a emulsiei. Aceasta constă în măsurarea timpului de separare completă t_s, a unui volum de emulsie aflat în repaus. Considerînd că procesul de ecremare nu intervine sensibil asupra timpului de separare t_s, aceasta se va aproxima cu timpul de coalescență t_c.

Expresia gradului de dispersie Δ, determinată prin calcul [8] este următoarea :

$$\Delta = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3k(1 - k_c t_c)}}$$

Se constată că gradul de dispersie Δ al particulelor de metanol depinde de constanta vitezei de coalescență k_c, de proporția de metanol K și de timpul de coalescență t_c, determinat la separarea completă a fazelor emulsiei (t_s).

Pentru K constant, gradul de dispersie Δ crește la mărirea timpului de separare t_s și invers. Această constatare, folosește în mod direct la aprecierea sensului de variație a lui Δ la modificarea turației n sau poziției l a cremalierei pompei de injecție.

Influența procentului de metanol K asupra gradului de dispersie Δ se manifestă atît direct cît și prin intermediul timpului t_s, astfel încît nu se poate preciza care din acțiuni este preponderentă.

Instalația de alimentare completă a fost montată pe standul de injecție. Colectarea probei de emulsie s-a făcut de la cele șase injectoare simultan. Temperatura emulsiei a fost $\sim 25°C$.

Deoarece viteza de coalescență se reduce apreciabil către sfîrșitul procesului de separare a fazelor emulsiei, aceasta introducînd dificultăți în aprecierea cu exactitate a timpului t_s, s-a procedat la determinarea dinamicii separării emulsiei motorină-metanol. În acest scop s-a urmărit într-o eprubetă gradată deplasarea în timp a suprafeței de separație între metanol (sus) și emulsie motorină-metanol(jos). Au fost efectuate determinări pentru :

$$l = 2\,;\ 5 \text{ mm};$$

$$n = 400\,;\ 800 \text{ rot/min}.$$

$$K = 15\,;\ 30\,\%.$$

În locul timpului t_s s-a utilizat timpul t_{90}, în care se separă deasupra, 90 % din metanolul conținut de emulsie. Valorile timpului t_{90} au fost determinate experimental și sînt prezentate în diagramele din fig. 7. Se constată că timpul de separare t_{90} respectiv gradul de dispersie Δ, scade

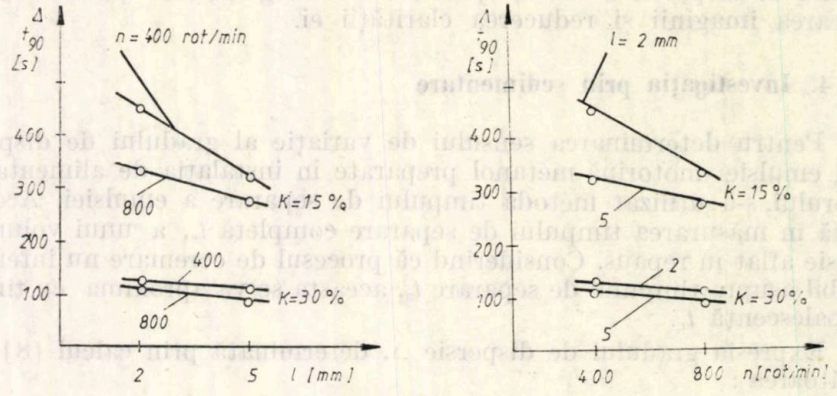


Fig. 7

la creşterea turaţiei, sau a sarcinii motorului. Această manifestare ar putea fi explicată prin reducerea timpului de trecere şi formare a emulsiei prin instalaţia de alimentare, la creşterea debitului de emulsie. De asemenea, se observă că la creşterea procentului de metanol K, se reduce intens timpul de separare a emulsiei.

În fig. 8 este prezentată o imagine a instalaţiei ce a fost utilizată pentru investigaţia pe cale electrică, optică şi prin sedimentare a emulsiei motorină-metanol, preparată de instalaţia de alimentare a motorului.

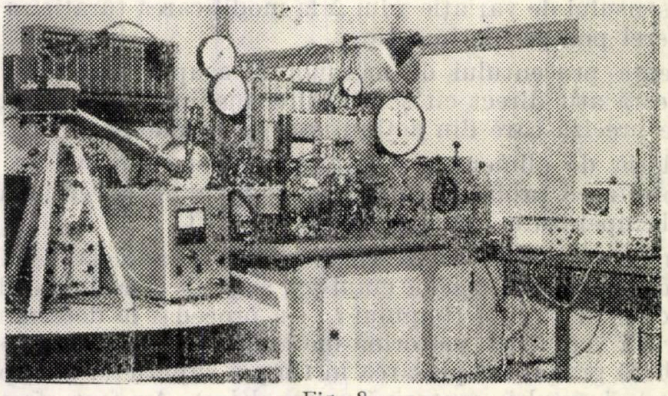


Fig. 8

5. Concluzii

În urma acestui studiu al emulsiei motorină-metanol se desprind următoarele concluzii:

a) In raport cu procentul de metanol K, se pot defini două domenii: primul pentru $K < K_1$ în care motorina este faza continuă, metanolul fiind faza dispersă şi al doilea pentru $K > K_1$ în care metanolul este faza continuă şi motorina faza dispersă, unde K_1 reprezintă proporţia limită de metanol la care are loc inversarea fazelor ($K_1 = 37\%$).

b) Gradul de dispersie Δ al emulsiei motorină-metanol preparată în instalaţia de alimentare a motorului, pentru $K < K_1$. scade la creşterea turaţiei sau sarcinii motorului ; scade la mărirea proporţiei de metanol din emulsie.

c) Ipoteza că metanolul este dispersat în motorină, trebuie să stea la baza oricărei modelări a proceselor formării amestecului din motorul diesel alimentat cu emulsie.

d) Pentru utilizarea emulsiei motorină-metanol în motorul diesel, domeniul de lucru este acela în care metanolul este dispersat în motorină ($K < 37\%$), asigurîndu-se astfel condiţii favorabile deungere, necesare funcţionării echipamentului de injecţie.

BIBLIOGRAFIE

1. *N. Apostolescu, ş. a.*, Construcţia de Maşini, febr. — martie 1983.
2. *B. Grünwald, ş. a.*, Despre proporţiile limită ale metanolului în amestecul cu motorină pentru motorul diesel D-2156-HMN-8, A IV-a Conferinţă Naţională de Motoare, Nov. 1982, Braşov.
3. *N. Apostolescu, ş. a.*, Economia relativă şi absolută de combustibil la utilizarea emulsiilor metanol-motorină, la motoarele diesel de autocamion, ESFA 1984, martie, Bucureşti.
4. *N. Apostolescu, ş. a.*, Construcţia de Maşini, apr. 1984.
5. *N. Apostolescu, ş. a.*, Instalaţie de alimentare cu doi combustibili pentru motoare cu aprindere prin comprimare, Brevet 84757/7. 04.1984.
6. *D. Nedelcu*, Dispozitiv de dozare a doi combustibili lichizi. Brevet 84758/7.04.1984.
7. *D. Nedelcu*, Pompă dublă de alimentare cu doi combustibili lichizi. Brevet 84759/7.04.1984.
8. *D. Nedelcu*, Contribuţii privind funcţionarea unui motor cu aprindere prin comprimare de tip M, cu injecţie de emulsie metanol-motorină. Teză de doctorat, I.P.B. 1985.

Experimental Study of the Methanol-In-Gasoil Emulsion Prepared by the Fueling System of a Diesel Engine

The methanol-in-gasoil emulsion, prepared by the fueling system of a diesel engine, was studied by electrical and optical technics. It was thus pointed out a critical concentration of 37% methanol ; under this limit methanol is the disperse phase in gasoil, over this limit methanol becomes the continuous phase. The dispersion degree of the emulsion of methanol in gasoil is diminished by the increase of the engine speed and load, or the increase of the methanol proportion.

C.Z. :681 ;620.178 :535.145

UNELE ASPECTE PRIVIND DURIFICAREA SUPERFICIALĂ CU RADIAȚII EMISE DE O INSTALAȚIE LASER CO_2 PENTRU PIESE DE MECANICĂ FINĂ

G. O. DONȚU, I. GUȚU, I. DINCULESCU*

Sînt prezentate rezultatele experimentale privind durificarea cu laser CO_2 pentru piese din oțel 34 MoGrNi 15 evidențiindu-se factorii ce condiționează procesul de tratament termic local cu laser.

Plecînd de la necesitățile de creștere a rezistenței la uzură pentru unele suprafețe active ale elementelor din componența aparatelor și sistemelor de mecanică fină și ținînd cont de proprietățile deosebite ale radiațiilor laser, de constatările experimentale și unele recomandări (1. 2, 3) s-au realizat cu bune rezultate tratamente termice superficiale la piese din oțel aliat 34 MoCrNi 15 material mult utilizat în construcțiile de mecanică fină.

Pentru experimentări s-au utilizat radiații laser de putere, generate de o instalație laser cu mediu activ gazos CO_2 cu funcționare în undă continuă (7).

Spre deosebire de alte procedee de durificare superficială (CIF, fascicul de electroni) utilizarea radiațiilor laser prezintă o serie de avantaje deosebite;

— se poate realiza un control riguros al mărimii suprafeței și adîncimii pe care s-a făcut tratamentul termic, prin reglarea corespunzătoare a parametrilor de lucru (puterea radiațiilor, viteza de deplasare a piesei, mărimea petei-spotuluui laser);

— se pot executa tratamente și pe zone ale unor suprafețe greu accesibile sau cu geometrie complexă;

— nu necesită atmosferă specială în zona de lucru.

Întrucît oțelul prezintă pentru radiațiile laser cu $\lambda = 10{,}6$ μm o reflectivitate foarte mare, aproximativ 95 %(3) s-a procedat la acoperirea cu negru de fum a suprafețelor de tratat, realizîndu-se mărirea gradului de absorbție a radiației laser de către materialul piesei.

---

* Șef. lucrări dr. ing., catedra Mecanică fină; I.F.T.A.R.; Ing., I.M.F

Mărimea petei-spotului laser pe piesă s-a reglat prin poziţia suprafeţei tratate (fig. 1) faţă de lentila de focalizare (din KCl, $f = 100$ mm).

Creşterile de duritate (Vickers) realizate pe zonele tratate au fost măsurate cu un microdurimetru ($F = 100$ g) iar pentru investigarea structurilor metalografice obţinute s-a utilizat microscopul metalografic.

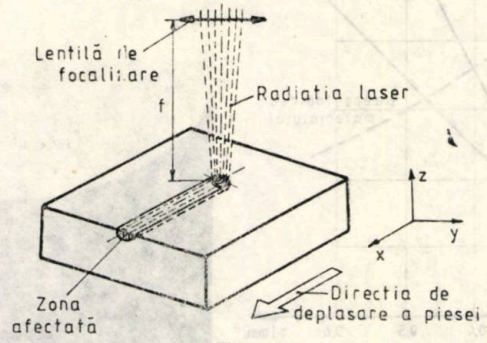


Fig. 1

La stabilirea corectă a parametrilor de lucru pentru procesele de tratament termic cu laser trebuie realizată corelarea corespunzătoare a acestora cu caracteristicile fizico-chimice ale materialului piesei, limitîndu-se temperatura de încălzire în zona tratată ($T_i = 0{,}75\ T$ topire) pentru a nu se ajunge la stadiul de topire sau vaporizare a materialului.

S-au folosit puteri ale radiaţiei laser de (140 ÷ 400) W, piesei imprimîndu-i-se o viteză de deplasare de (2 ÷ 30) mm/s. Experimentările realizate au evidenţiat creşteri semnificative ale durităţii materialului în zonele tratate şi legătura dintre parametrii de lucru şi materialul tratat La proba din figura 2a ($P = 140$ W ; $v = 5$ mm/s) se observă forma ş

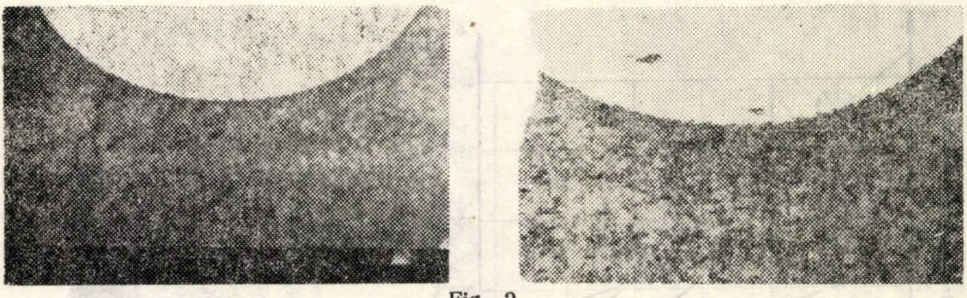


Fig. 2

mărimea zonei afectate de laser ; evoluţia acesteia la creşterea nivelului puterii laser ($P = 210$ W) este dată de figura 2b. Atunci cînd nu se realizează o corelare corespunzătoare între nivelul puterii radiaţiei, viteza de deplasare a piesei şi adîncimea de călire (fig. 3) începe topirea materialului la suprafaţa zonei tratate, aşa cum a avut loc la proba prezentată în figura 4. Valorile optime de lucru pentru viteza de deplasare a piesei şi puterea radiaţiilor corelate cu modul de focalizare a fasciculului laser pentru două

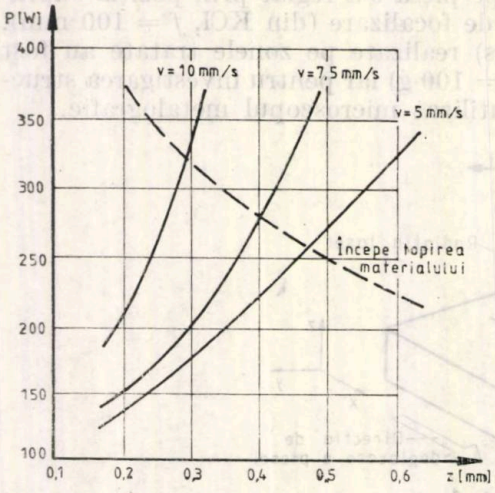


Fig. 3

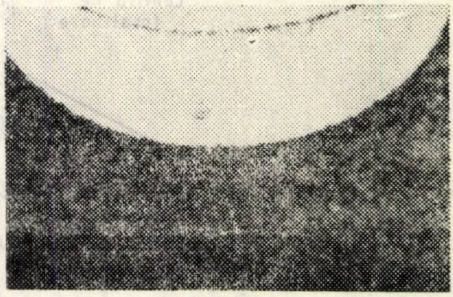


Fig. 4

reglaje ale spotului (Ø = 1,7 mm); Ø = 1 mm) la realizarea unor adîncimi de penetrare de (0,1 ÷ 0,7) mm sînt date de nomograma din figura 5.

Se observă că pentru obținerea unor adîncimi mari de încălzire sînt necesare puteri laser și viteze de deplasare mici, iar pentru adîncimi mici vitezele de deplasare și puterea radiațiilor laser devin impracticabil de mari. În aceste cazuri, și atunci cînd nu este indicat cuplajul dintre adîncimea de penetrare și viteza de deplasare a piesei se preferă utilizarea fasciculelor laser pulsate în mod repetat.

Investigarea structurilor metalografice obținute în urma tratamentului termic cu laser a pus în evidență (fig. 6) apariția unor componenți

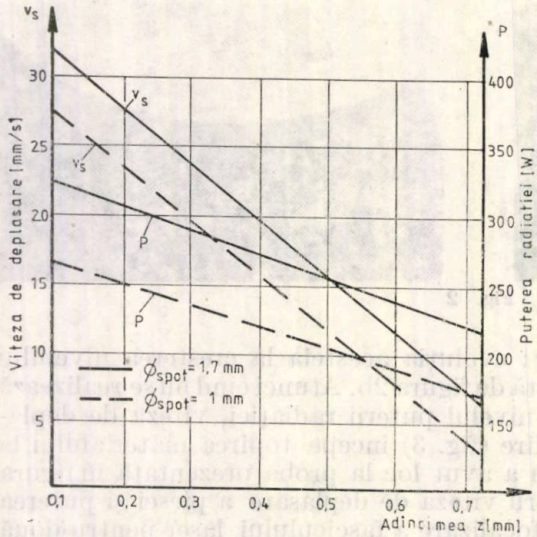


Fig. 5

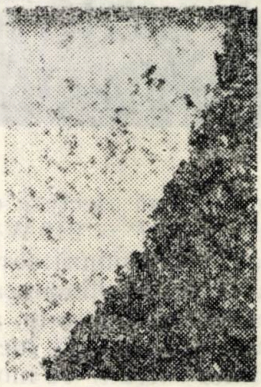


Fig. 6

structurali favorabili (structură martensitică — bainitică) ce au condus la creșterea durității zonelor tratate. Legătura dintre nivelul puterii radiațiilor, adîncimea de călire și microduritatea obținută este dată în figura 7, observîndu-se evoluția contradictorie dintre creșterea durității și adîncimii de călire, de obicei realizîndu-se un compromis între cei doi factori. Scăderea durității odată cu creșterea adîncimii de călire se explică prin

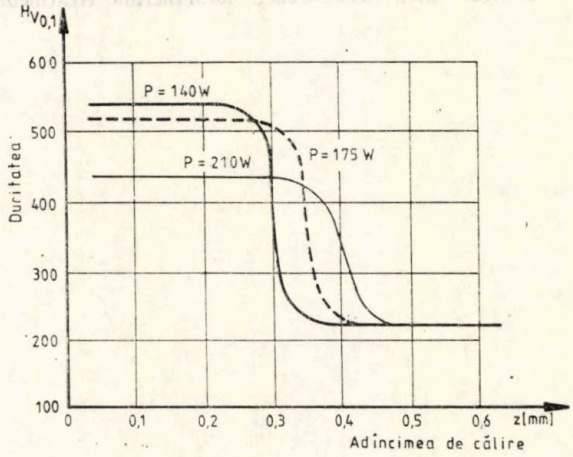


Fig. 7

micșorarea gradientului de temperatură în masa piesei, care are dimensiuni mult mai mari decît zona afectată de laser.

Rezultatele obținute, privind creșterea durității cît și faptul că deformațiile termice ale pieselor tratate cu laser sînt minime, sînt considerente care fac să crească mult domeniul de aplicare pentru piese de mici dimensiuni specifice mecanicii fine.

BIBLIOGRAFIE

1. *I. Guțu, N. Comăniciu, ș.a.*, Asupra utilizării radiației laser de putere generată de o sursă laser CO_2, cu funcționare în undă continuă, la tratamentul superficial al unor materiale metalice, I. C. F. — I. F. T. A. R. — LOP-24, 1982-Februarie.
2. *I. Steffen*, Rev. Feinwerktechnik-Messtechnik-88—1980-I.
3. *Gh. Diaconescu, O. Donțu*, Unele considerații privind utilizarea laserului la operații de durificare locală pentru unele sortimente de oțeluri, Volum-COMEFIN-1, Institutul Politehnic București, 1982
4. *Jacques Ernest*, Rev. LASER FOCUS — June 1983.
5. *P. R. Strutt*, Steat treatment of laser melted M2 tool steel, American Institute of Physics, Conference Proceedings, New-York, 1979

6. *N. Rykalin*, Laser Machining and welding, Moscow — 1978.
7. I. F. T. A. R. — Prospect — Laser cu CO_2 de 2 KW.

Some Aspects on Superficial Hardening with Radiation Emitted by CO_2 Laser Installation for Pieces for Fine Mechanics

The experimental results on hardening with CO_2 laser for 34 MoCrNi 15 steel pieces are presented. The factors which conditioned local thermic treatment process with laser are pointed out.

C.Z. :621.43 :533 :510.67

UN MODEL FIZICO-MATEMATIC AL CURGERII INTRE ATMOSFERĂ ŞI CILINDRUL UNUI MOTOR CU ARDERE INTERNĂ, CU CONSIDERAREA FENOMENELOR DINAMICE CARE APAR

S. MINCULESCU *

În lucrare se elaborează un model fizico-matematic al curgerii între atmosferă şi cilindrul unui motor cu ardere internă în 4 timpi, cu admisie normală, luînd în considerare fenomenele dinamice care apar. Se stabilesc ecuaţiile care descriu fenomenul şi se prezintă programul de calcul elaborat, verificîndu-se acest program, atît independent cît şi ca parte componentă a programului principal elaborat pentru simularea procesului de schimbare a gazelor, în lucrarea [3].

Fenomenele dinamice asociate umplerii unui motor cu ardere internă se descriu atît prin efecte inerţiale cît şi prin efecte care decurg din pulsaţiile provocate de propagarea undelor de mică amplitudine, pe traseul admisiei. Efectele importante ale fenomenelor dinamice se traduc prin modificarea în ultimă instanţă, a cantităţii de încărcătură proaspătă reţinută în cilindru la închiderea supapei de admisie. Din această cauză, stăpînirea prin calcul a fenomenelor dinamice capătă o importanţă primordială pentru activităţile de concepţie a motoarelor cu ardere internă.

Modelul propus presupune existenţa unui sistem format dintr-o conductă — colectorul — avînd un capăt liber, în legătură cu atmosfera, celălalt capăt fiind legat la un recipient — cilindrul (fig. 1).

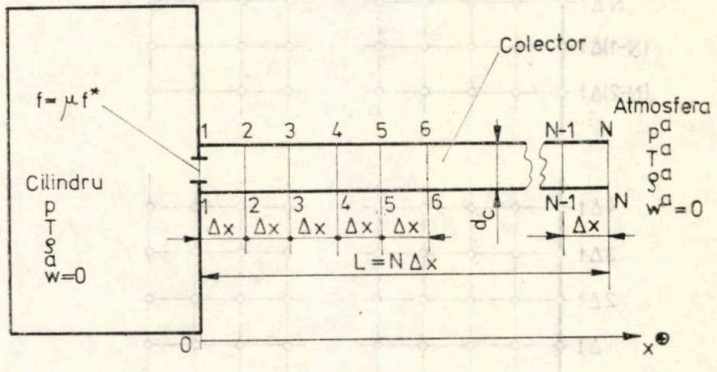


Fig. 1

* Şef lucrări dr. ing., catedra Geometrie descriptivă şi desen

Starea gazului în cilindru este considerată constantă, (p, T, ρ constante) pe un interval de timp Δt, corespunzător pasului de calcul $\Delta\theta$, °RAC folosit în cadrul programului de calcul al procesului de schimb de gaze elaborat în [3], iar parametrii atmosferei în (din) care are loc curgerea sînt p^a, T^a, ρ^a, de asemenea constanți.

Legătura colectorului cu cilindrul se face prin orificiul de secțiune variabilă f, oferit de supapă;

$$f = \mu f^* \tag{1}$$

Inițial, în colector, gazul este imobil și se găsește la parametrii de stare ai atmosferei, p^a, T^a și ρ^a constanți.

Pentru precizarea variației mărimilor de stare în colector, odată cu începerea deschiderii legăturii acestuia cu cilindrul, se discretizează conducta în N segmente egale — tronsoane, de lungime Δx:

$$L = N\,\Delta\,x \tag{2}$$

Se impune ca intervalele de variație în interiorul cărora se rezolvă pas cu pas problema, să îndeplinească următoarea condiție [1], [2]:

$$\Delta x > a_c \Delta t, \tag{3}$$

adică, perturbația provocată în colector, de curgerea gazului, să se propage în intervalul de timp Δt pe o distanță mai mică decît lungimea unui segment de conductă, Δx. Din condiția (3) rezultă:

$$a_c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{sau} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} < a_c, \tag{4}$$

sau încă

$$a_c < \alpha < 1, \tag{5}$$

unde $\alpha = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ este parametrul rețelei de integrare (fig. 2).

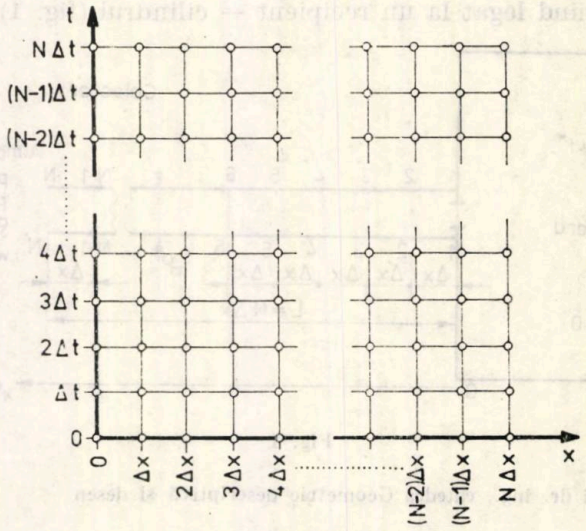


Fig. 2

Rezolvarea numerică pentru tronsoanele 1 ..., N, la timpul $t^0 = 0$
La momentul $t_0 = 0$, secțiunea de curgere este nulă ($f^0 = 0$, supapa este încă închisă), iar starea gazului în colector este precizată de setul de relații:

$$p_i^0 = p^a, \qquad T_i^0 = T^a, \qquad \rho_i^0 = \rho^a, \tag{6}$$

$$a_i^0 = a^a = \sqrt{\varkappa RT^a}, \quad w_i^0 = 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Rezolvarea numerică pentru tronsonul 1, de la $t^0 = 0$ *la* $t^1 = \Delta t$.
La începutul acestui prim interval de calcul, la $t^0 = 0$ secțiunea oferită de supapă este nulă, nu există zonă perturbată în colector, iar starea gazului în primul tronson este precizată de relațiile:

$$\overline{p_1^0} = \overline{p_p^0} = p^a, \qquad \overline{T_1^0} = \overline{T_p^0} = T^a,$$
$$\tag{7}$$
$$\overline{\rho_1^0} = \overline{\rho_p^0} = \rho^a, \qquad \overline{a_1^0} = \overline{a_p^0} = a^a.$$

Evident viteza de curgere prin secțiunea $0-0$, w_0^0, și prin secțiunea $1-1$, w°_1, precum și cantitatea de gaz schimbată de cilindru cu colectorul, ΔG_1^0, sînt nule (v. fig. 3).

La sfîrșitul intervalului, la $t^1 = \Delta t$, secțiunea oferită de supapă este f^1, prin aceasta avînd loc curgerea din starea 1, care poate fi cilindrul, fie colectorul, în starea 2, care poate fi în consecință, fie colectorul, fie

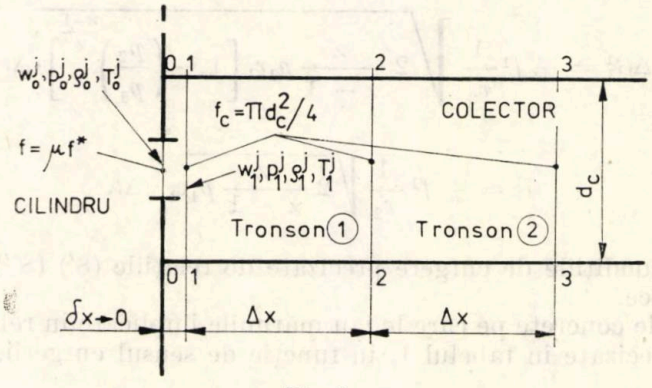


Fig. 3

cilindrul, în funcție de sensul diferenței de presiune. Relația care precizează raportul presiunilor în condiții subcritice de curgere este:

$$\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{8'}$$

iar în condiții critice:

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}. \tag{8''}$$

Viteza de curgere prin secțiunea 0—0 este precizată de relația :

$$w_0^1 = \sqrt{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{\mathcal{R} T_1}{M} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]}, \tag{9'}$$

dacă regimul de curgere este în condiții subcritice și de relația :

$$w_0^1 = \sqrt{2 \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{\mathcal{R} T_1}{M}}, \tag{9''}$$

dacă regimul de curgere este critic.

În colectorul având secțiunea $f_c = \frac{\pi d_c^2}{4}$, constantă, viteza în secțiunea 1—1, la $t^1 = \Delta t$ este precizată de relația :

$$w_1^1 = \pm w_0^1 \frac{f^1}{f_c}, \tag{10}$$

după cum curgerea are loc din colector în cilindru, sau invers (v. fig. 3).

Cantitatea de gaz, în kg, schimbată de cilindru cu colectorul în intervalul de timp Δt, de la $t^\circ = 0$ la $t^1 = \Delta t$, este :

$$\Delta G_1^1 = \pm f^1 \frac{1}{v_2} \sqrt{2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]} \cdot \Delta t, \tag{11'}$$

sau :

$$G_1^1 = \pm f^1 \frac{1}{v_2} \sqrt{2 \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} p_1 v_1} \cdot \Delta t, \tag{11''}$$

după cum condițiile de curgere precizate de relațiile (8') (8'') sînt critice sau subcritice.

Valorile concrete pe care le iau mărimile implicate în relațiile anterioare sînt precizate în tabelul 1, în funcție de sensul curgerii.

Tabelul

Mărimea / Sens curgere	p_1	p_2	v_1	v_2	T_1
colector → cilindru	p_c	p	$v_{c(cr)}$	$v_{(cr)}$	T_c
cilindru → colector	p	p_c	$v_{(cr)}$	$v_{c(cr)}$	T

Dacă se admite că perturbația se propagă în colector cu viteza sunetului a_c, situația primului tronson de colector, (variația presiunii), între secțiunile 1—1 și 2—2, la timpul $t^1 = \Delta t$, este schematizată în figura 4,

pentru ambele situații în care poate avea loc curgerea (din colector în cilindru sau invers).

Perturbația a înaintat în colector pe distanța $a_c\,\Delta t$, afectînd volumul de gaz $\Delta V = f_c a_c \Delta t$, din care, cantitatea ΔG_1^1 a fost schimbată cu cilindrul prin secțiunea f^1. Densitatea medie a gazului în interiorul volumului perturbat este:

$$\overline{\rho_p^1} = \rho^a + \frac{\Delta G_1^1}{f_c a_c \Delta t} \cdot \tag{12}$$

Presiunea medie în interiorul aceluiași volum perturbat, admițînd că evoluția gazului este izentropică (fără schimb de căldură și frecare cu peretele), este:

$$\overline{p_p^1} = p^a \left(\frac{\overline{\rho_p^1}}{\rho^a} \right)^{\varkappa}, \tag{13}$$

iar temperatura:

$$\overline{T_p^1} = T^a \left(\frac{\overline{\rho_p^1}}{\rho^a} \right)^{\varkappa - 1} \cdot \tag{14}$$

Viteza sunetului în aceste condiții de stare este:

$$\overline{a_p^1} = \sqrt{\varkappa R \overline{T_p^1}} \tag{15}$$

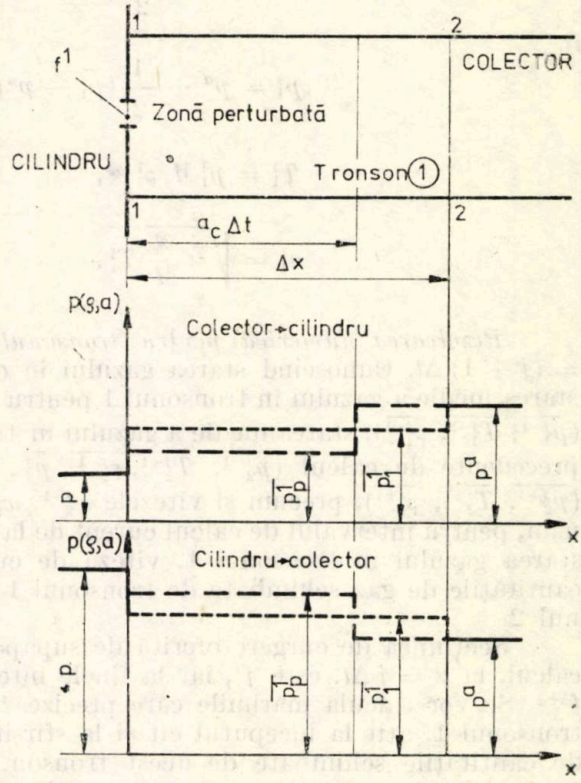


Fig. 4

Discretizarea colectorului pe tronsoane presupune admiterea unor valori constante ale parametrilor de stare în interiorul fiecărui tronson. Ca urmare, valorile medii în interiorul primului tronson, la sfîrșitul primului interval de calcul, la $t^1 = \Delta t$, sînt:

$$\overline{\rho_1^1} = \rho^a - \frac{a_c \Delta t}{\Delta x} (\rho^a - \overline{\rho_p^1}) = \rho^a - a_c \alpha (\rho^a - \overline{\rho_p^1}), \tag{16}$$

$$\overline{p_1^1} = p^a - \frac{a_c \Delta t}{\Delta x} (p^a - \overline{p_p^1}) = p^a - a_c \alpha (p^a - \overline{p_p^1}), \tag{17}$$

$$\overline{T_1^1} = \overline{p_1^1}\, M / \overline{\rho_1^1} \mathscr{R}, \tag{18}$$

$$\overline{a_1^1} = \sqrt{\varkappa \frac{\mathscr{R}}{M} \overline{T_1^1}}. \tag{19}$$

Mărimile de stare ale gazului în nodul 1 al rețelei de integrare, la nivelul de timp $t^1 = \Delta t$, se vor determina, [4], [5], cu expresiile:

$$\rho_1^1 = \rho^a + \frac{1}{2}(\overline{\rho_1^1} - \rho^a), \tag{20}$$

$$p_1^1 = p^a + \frac{1}{2}(\overline{p_1^1} - p^a), \tag{21}$$

$$T_1^1 = p_1^1 M / \rho_1^1 \mathcal{R}, \tag{22}$$

$$a_1^1 = \sqrt{\varkappa \frac{\mathcal{R}}{M} T_1^1}. \tag{23}$$

Rezolvarea numerică pentru tronsonul 1, de la $t^j = j\,\Delta t$ *la* $t^{j+1} = (j+1)\,\Delta t$. Cunoscînd starea gazului în cilindru (p, T, ρ constante), starea medie a gazului în tronsonul 1 pentru intervalul precedent de calcul ($\overline{p_1^{j-1}}$, $\overline{T_1^{j-1}}$, $\overline{\rho_1^{j-1}}$), starea medie a gazului în tronsonul 2 pentru intervalele precedente de calcul ($\overline{p_2^{j-1}}$, $\overline{T_2^{j-1}}$, $\overline{\rho_2^{j-1}}$, $\overline{p_2^j}$, $\overline{T_2^j}$, $\overline{\rho_2^j}$) și pentru cel curent ($\overline{p_2^{j+1}}$, $\overline{T_2^{j+1}}$, $\overline{\rho_2^{j+1}}$), precum și vitezele w_2^{j-1}, w_2^j, w_2^{j+1}, va trebui să determinăm, pentru intervalul de calcul curent de la $t^j = j\,\Delta t$ la $t^{j+1} = (j+1)\,\Delta t$, starea gazului în tronsonul 1, viteza de curgere prin secțiunea 1—1 și cantitățile de gaz schimbate de tronsonul 1 cu cilindrul, cît și cu tronsonul 2.

Secțiunea de curgere oferită de supapă la începutul intervalului de calcul, la $t^j = j\,\Delta t$, este f^j, iar la finele intervalului, la $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$, f^{j+1}. Se vor calcula mărimile care precizează starea medie a gazului din tronsonul 1, atît la începutul cît și la sfîrșitul intervalului, ținînd seama de cantitățile schimbate de acest tronson, cu cilindrul, prin secțiunea 1—1, ΔG_1 și cu tronsonul 2, prin secțiunea 2—2, ΔG_2. Pentru situația generală de curgere din starea 1, care poate fi cilindrul, fie colectorul, în starea 2, care poate fi în consecință, fie colectorul, fie cilindrul, aceasta poate avea loc în condiții subcritice, dacă:

$$\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{24'}$$

sau critice, dacă:

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}. \tag{24''}$$

Viteza de curgere prin secțiunea 0—0 este precizată de una din relațiile:

$$w_0 = \sqrt{2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{\mathcal{R} T_1}{M} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}, \tag{25'}$$

$$w_0 = \sqrt{2\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{RT_1}{M}} \qquad w_0 = \sqrt{2\frac{\varkappa}{\varkappa+1}}, \tag{25''}$$

după cum curgerea are loc după condițiile (24') sau (24''), iar viteza în secțiunea 1—1, se va determina cunoscînd $f_c = \frac{\pi d_c^2}{4}$, cu relația:

$$w_1 = \pm w_0 \frac{f}{f_c}. \tag{26}$$

Cantitatea de gaz schimbată de cilindru cu colectorul, prin secțiunea 1—1, este, funcție de condițiile de curgere (24'—24''):

$$\Delta G_1 = \pm f \frac{1}{v_2} \sqrt{2\frac{\varkappa}{\varkappa-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} \cdot \Delta t, \tag{27'}$$

sau:

$$\Delta G_1 = \pm f \frac{1}{v_2} \sqrt{2\frac{\varkappa}{\varkappa+1} p_1 v_1} \cdot \Delta t. \tag{27''}$$

Valorile concrete pe care le iau mărimile care intervin în relațiile (24)—(27) sînt precizate pentru ambele momente de timp, t^j și t^{j+1} și pentru ambele sensuri de curgere, în tabelul 2.

Tabel 2

Timpul	Mărimea / Sens curgere	f	w_0	w_1	ΔG_1	p_1	p_2	v_1	v_2	T_1
t^j	colector → cilindru	f^j	w_0^j	w_1^j	ΔG_1^j	$\overline{p_1^{j-1}}$	p	$\overline{v_{1(cr)}^{j-1}}$	v	$\overline{T_1^{j-1}}$
	cilindru → colector					p	$\overline{p_1^{j-1}}$	v	$\overline{v_{1(cr)}^{j-1}}$	T
t^{j+1}	colector → cilindru	f^{j+1}	w_0^{j+1}	w_1^{j+1}	ΔG_1^{j+1}	$\overline{p_1^j}$	p	$\overline{v_{1(cr)}^j}$	$v_{(cr)}$	$\overline{T_1^j}$
	cilindru ⇒ colector					p	$\overline{p_1^j}$	$v_{(cr)}$	$\overline{v_{1(cr)}^j}$	T

Se calculează în continuare, la momentul de timp $t^j = j\Delta t$, cantitatea de gaz schimbată de tronsonul 1 cu tronsonul 2:

$$\Delta G_2^j = -\frac{w_2^{j-1} + w_2^j}{2} \frac{\overline{\rho_2^{j-1}} + \overline{\rho_2^j}}{2} f_c \Delta t, \tag{28}$$

variația cantității de gaz în tronsonul 1, prin suma algebrică:

$$\delta\Delta G^j = \Delta G_1^j + \Delta G_2^j, \tag{29}$$

precum și mărimile de stare și viteza sunetului medii, în tronsonul 1:

$$\overline{\rho_1^j} = \overline{\rho_1^{j-1}} + \frac{\delta\Delta G^j}{f_c \Delta x}, \tag{30}$$

$$\overline{p_1^j} = \overline{p_1^{j-1}} \left(\frac{\overline{\rho_1^j}}{\overline{\rho_1^{j-1}}} \right)^{\varkappa}, \tag{31}$$

$$\overline{T_1^j} = \overline{T_1^{j-1}} \left(\frac{\overline{\rho_1^j}}{\overline{\rho_1^{j-1}}} \right)^{\varkappa - 1}, \tag{32}$$

$$\overline{a_1^j} = \sqrt{\varkappa \frac{\mathscr{R}}{M} \overline{T_1^j}}. \tag{33}$$

În același mod sînt determinate aceleași mărimi, la momentul de timp $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$:

$$\Delta G_2^{j+1} = - \frac{w_2^{j+1} + w_2^j}{2} \frac{\overline{\rho_2^{j+1}} + \overline{\rho_2^j}}{2} f_c \Delta t, \tag{34}$$

$$\delta\Delta G^{j+1} = \Delta G_1^{j+1} + \Delta G_2^{j+1}, \tag{35}$$

$$\overline{\rho_1^{j+1}} = \overline{\rho_1^j} + \frac{\delta\Delta G^{j+1}}{f_c \Delta x}, \tag{36}$$

$$\overline{p_1^{j+1}} = \overline{p_1^j} \left(\frac{\overline{\rho_1^{j+1}}}{\overline{\rho_1^j}} \right)^{\varkappa} \tag{37}$$

$$\overline{T_1^{j+1}} = \overline{T_1^j} \left(\frac{\overline{\rho_1^{j+1}}}{\overline{\rho_1^j}} \right)^{\varkappa - 1}, \tag{38}$$

$$\overline{a_1^{j+1}} = \sqrt{\varkappa \frac{\mathscr{R}}{M} \overline{T_1^{j+1}}}. \tag{39}$$

Mărimile de stare în nodul 1 al relației de integrare, la nivelul de timp $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$ sînt:

$$\rho_1^{j+1} = \overline{\rho_1^j} + \frac{1}{2} (\overline{\rho_1^{j+1}} - \overline{\rho_1^j}), \tag{40}$$

$$p_1^{j+1} = \overline{p_1^j} + \frac{1}{2}(\overline{p_1^{j+1}} - \overline{p_1^j}), \tag{41}$$

$$T_1^{j+1} = p_1^{j+1} M / \rho_1^{j+1} \mathcal{R}, \tag{42}$$

iar viteza sunetului în aceste condiții este:

$$a_1^{j+1} = \sqrt{\varkappa \frac{\mathcal{R}}{M} \overline{T_1^{j+1}}}. \tag{43}$$

Rezolvarea numerică pentru tronsoanele 2, ..., N, de la $t^j = j\Delta t$, *la* $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$. La sfîrșitul următorului interval de calcul $(\Delta t, 2\Delta t)$, la momentul de timp $t^2 = 2\Delta t$, parametrii de stare în punctul 2 se determină rezolvînd sistemul de ecuații diferențiale care descrie curgerea izentropică nestaționară a gazului prin colector [3], [6]:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\partial w}{\partial t} + w \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{2a}{\varkappa - 1} \dfrac{\partial a}{\partial x} = 0 & (44) \\ E_2 = a \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{2}{\varkappa - 1}\left(\dfrac{\partial a}{\partial t} + w \dfrac{\partial a}{\partial x} \right) = 0 & (45) \end{cases}$$

Dacă se consideră o combinație liniară a celor două ecuații (44), (45), de forma:

$$E = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2, \tag{46}$$

unde λ_1 și λ_2 sînt doi parametri, înlocuind expresiile lui E_1 și E_2, se obține:

$$E = \lambda_1 \left[\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2a}{\varkappa - 1} \frac{\partial a}{\partial x} \right] + \\ + \lambda_2 \left[a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{\varkappa - 1}\left(\frac{\partial a}{\partial t} + w \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right] = 0 \tag{47}$$

Grupînd convenabil termenii și înmulțind cu dx, relația (47) devine:

$$E\,dx = (\lambda_1 w + \lambda_2 a) \frac{\partial w}{\partial x} dx + \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} dx + \\ + \frac{2}{\varkappa - 1}(\lambda_1 a + \lambda_2 w) \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{2}{\varkappa - 1} \lambda_2 \frac{\partial a}{\partial t} dx. \tag{48}$$

Exprimînd diferenţialele totale ale funcţiilor w şi a :

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{49}$$

$$\mathrm{d}a = \frac{\partial a}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial a}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{50}$$

în relaţia (48) se înlocuiesc termenii $\frac{\partial w}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ şi $\frac{\partial a}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ cu cei rezultaţi din (49) şi (50). Astfel se obţine :

$$E\,\mathrm{d}x = (\lambda_1 w + \lambda_2 a)\left(\mathrm{d}w - \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) + \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \\ + \frac{2}{\varkappa - 1}(\lambda_1 a + \lambda_2 w)\left(\mathrm{d}a - \frac{\partial a}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{2}{\varkappa - 1}\lambda_2 \frac{\partial a}{\partial t}\,\mathrm{d}x. \tag{51}$$

Ordonînd termenii în relaţia (51), rezultă :

$$E\,\mathrm{d}x = (\lambda_1 w + \lambda_2 a)\,\mathrm{d}w + \frac{2}{\varkappa - 1}(\lambda_1 a + \lambda_2 w)\,\mathrm{d}a + \\ + [\lambda_1\,\mathrm{d}x - (\lambda_1 w + \lambda_2 a)\,\mathrm{d}t]\frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \frac{2}{\varkappa - 1}[\lambda_2\,\mathrm{d}x - (\lambda_1 a + \lambda_2 w)\,\mathrm{d}t]\frac{\partial a}{\partial t} = 0. \tag{52}$$

În această formă se constată că dacă parametrii λ_1 şi λ_2 se aleg astfel încît să fie îndeplinită condiţia :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda_1 w + \lambda_2 a}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 a + \lambda_2 w}{\lambda_2}, \tag{53}$$

atunci ecuaţia (52) se reduce la :

$$E\,\mathrm{d}x = (\lambda_1 w + \lambda_2 a)\,\mathrm{d}w + \frac{2}{\varkappa - 1}(\lambda_1 a + \lambda_2 w)\,\mathrm{d}a = 0, \tag{54}$$

adică de-a lungul direcţiilor $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ precizate de (53), funcţiile w şi a sînt legate între ele printr-o relaţie în care intervin numai diferenţialele lor totale. Aceste două direcţii se numesc caracteristicile sistemului (44—45).

Din condițiile (53) se deduce:

$$\lambda_1 dx = \lambda_1 w\, dt + \lambda_2 a dt, \text{ sau: } \lambda_1(dx - w\, dt) = \lambda_2 a dt, \tag{55}$$

sau încă:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a\,dt}{dx - wdt} = \frac{1}{\frac{1}{a}\frac{dx}{dt} - \frac{w}{a}}, \tag{55}$$

și:

$$\lambda_2 dx = \lambda_1 a dt + \lambda_2 w dt, \text{ sau: } \lambda_2(dx - wdt) = \lambda_1\, a dt,$$

sau final:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{dx - wdt}{adt} = \frac{1}{a}\frac{dx}{dt} - \frac{w}{a}. \tag{56}$$

Din relațiile (55) și (56) rezultă:

$$\frac{adt}{dx - wdt} = \frac{dx - wdt}{adt}, \text{ sau: } (dx - wdt)^2 - (adt)^2 = 0 \tag{57}$$

Lucrînd în expresia (57) și împărțind cu $(dx)^2$ se obține:

$$(w^2 - a^2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2w\left(\frac{dt}{dx}\right) + 1 = 0. \tag{58}$$

Ecuația (58) are două rădăcini reale și distincte;

$$\frac{dt}{dx} = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - (w^2 - a^2)}}{w^2 - a^2} = \frac{w \pm a}{(w + a)(w - a)} \tag{59}$$

Direcțiile precizate de relațiile:

$$\frac{dt}{dx} = \eta_+ = \frac{1}{w + a} \tag{60}$$

$$\frac{dt}{dx} = \eta_- = \frac{1}{w - a}, \tag{61}$$

reprezintă pantele celor două caracteristici într-un punct din spațiul soluțiilor sistemului (44—45). Introducînd în (55) și (56) expresiile (60) și (61) rezultă:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\frac{1}{a}(w + a) - \frac{w}{a}} = +1; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\frac{1}{a}(w - a) - \frac{w}{a}} = -1 \tag{62}$$

și :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{a}(w + a) - \frac{w}{a} = +1, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{a}(w - a) - \frac{w}{a} = -1. \tag{63}$$

Cu aceste valori $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \pm 1$, relația (54) se transformă pentru cele două cazuri în :

$$\mathrm{d}w + \frac{2}{\varkappa - 1}\,\mathrm{d}a = 0, \tag{64}$$

și :

$$-\mathrm{d}w + \frac{2}{\varkappa - 1}\,\mathrm{d}a = 0, \tag{65}$$

care exprimă dependența între funcțiile w și a de-a lungul curbelor caracteristice precizate de (60) și (61).

Determinarea soluțiilor la timpul t^{j+1} cunoscînd soluțiile la timpul t^j, se face în modul următor (fig. 5). Se presupune inițial că starea punctului P este identică cu cea a punctului S și se estimează pantele celor două caracteristici, într-o primă aproximație:

$$\eta_+ = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{w_i^j + a_i^j}, \tag{66}$$

$$\eta_- = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{w_i^j - a_i^j}. \tag{67}$$

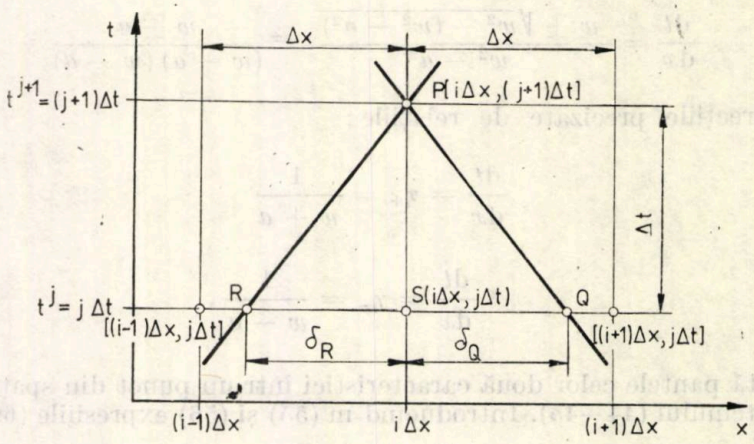


Fig. 5

Caracteristicile intersectează nivelul t^j în punctele R și Q. Parametrii de stare și de curgere corespunzători acestor puncte se determină prin interpolare liniară între punctele $((i-1)\,\Delta x, j\Delta t)$ și $(i\Delta x, j\Delta t)$ și respec-

tiv $(i\Delta x, j\Delta t)$ și $((i+1)\Delta x, j\Delta t)$. Admițînd o variație liniară a acestor doi parametri în interiorul fiecărui tronson de conductă, se determină:

$$a_i^j - a_R = \frac{1}{\Delta x}\delta_R(a_i^j - a_{i-1}^j), \tag{68}$$

$$w_i^j - w_R = \frac{1}{\Delta x}\delta_R(w_i^j - w_{i-1}^j) \tag{69}$$

și

$$a_Q - a_i^j = \frac{1}{\Delta x}\delta_Q(a_{i+1}^j - a_i^j), \tag{70}$$

$$w_Q - w_i^j = \frac{1}{\Delta x}\delta_Q(w_{i+1}^j - w_i^j), \tag{71}$$

unde δ_R și δ_Q se pot exprima din triunghiurile dreptunghice RSP și PSQ:

$$\delta_R = (w_i^j + a_i^j)\,\Delta t, \tag{72}$$

$$\delta_Q = (a_i^j + w_i^j)\,\Delta t. \tag{73}$$

Rezultă, înlocuind în (68) ... (71):

$$\begin{cases} a_R = a_i^j - (a_i^j - a_{i-1}^j)(a_i^j + w_i^j)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}, & (74) \\ w_R = w_i^j - (w_i^j - w_{i-1}^j)(a_i^j + w_i^j)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}, & (75) \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} a_Q = a_i^j + (a_{i+1}^j - a_i^j)(a_i^j - w_i^j)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}, & (76) \\ w_Q = w_i^j + (w_{i+1}^j - w_i^j)(a_i^j - w_i^j)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}. & (77) \end{cases}$$

De-a lungul caracteristicilor sînt valabile relațiile (64) și (65), care, particularizate pentru punctul P (v. fig. 7), dau:

$$\begin{cases} w_P - w_R + \dfrac{2}{\varkappa - 1}(a_P - a_R) = 0, & (78) \\ -w_P + w_Q + \dfrac{2}{\varkappa - 1}(a_P - a_Q) = 0, & (79) \end{cases}$$

sistem, care oferă soluţiile :

$$\begin{cases} a_P = \dfrac{\varkappa - 1}{4}(w_R - w_Q) + \dfrac{1}{2}(a_R + a_Q), & (80) \\ w_P = \dfrac{1}{2}(w_R + w_Q) + \dfrac{1}{\varkappa - 1}(a_R - a_Q). & (81) \end{cases}$$

Cu aceste două valori se calculează o a doua estimată a pantelor celor două caracteristici, care trec prin punctul P :

$$^1\eta_+ = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{w_P + a_P}, \qquad (66')$$

$$^1\eta_- = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{w_P - a_P} \qquad (67')$$

şi se recalculează în mod identic, soluţia pentru punctul P, calculînd :

$$^1a_P = \frac{\varkappa - 1}{4}(^1w_R - {}^1w_Q) + \frac{1}{2}(^1a_R + {}^1a_Q) \qquad (80')$$

$$^1w_P = \frac{1}{2}(^1w_R + {}^1w_Q) + \frac{1}{\varkappa - 1}(^1a_R - {}^1a_Q) \qquad (81')$$

Procesul iterativ continuă pînă cînd erorile relative obţinute cu soluţiile din iteraţiile "$k-1$" şi „k" satisfac condiţiile de eroare impuse, astfel conferindu-se valorilor lui a_P şi w_P obţinute în iteraţia de ordinul „k", caracter de soluţie finală pentru pasul $(x_{i-1},\ x_i)$, în intervalul de timp $(t^j,\ t^{j+1})$:

$$a_i^{j+1} = {}^{(k)}a_P = \frac{\varkappa - 1}{4}({}^{(k)}w_R - {}^{(k)}w_Q) + \frac{1}{2}({}^{(k)}a_R + {}^{(k)}a_Q), \qquad (80'')$$

$$w_i^{j+1} = {}^{(k)}w_P = \frac{1}{2}({}^{(k)}w_R + {}^{(k)}w_Q) + \frac{1}{\varkappa - 1}({}^{(k)}a_R - {}^{(k)}a_Q), \qquad (81'')$$

unde $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N$.

Mărimile de stare se calculează cu relaţiile valabile pentru evoluţiile izentropice :

$$T_i^{j+1} = (a_i^{j+1})^2/\varkappa\mathscr{R}, \qquad (82)$$

$$p_i^{j+1} = p_i^j \left(\frac{T_i^{j+1}}{T_i^j}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \qquad (83)$$

și :

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j \left(\frac{p_i^{j+1}}{p_i^j} \right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \tag{84}$$

unde $i = 2, 3, \ldots, N$.

Programul de calcul elaborat pentru rezolvarea numerică a acestui model (fig. 6) poate fi încorporat ca o parte a programului principal în-

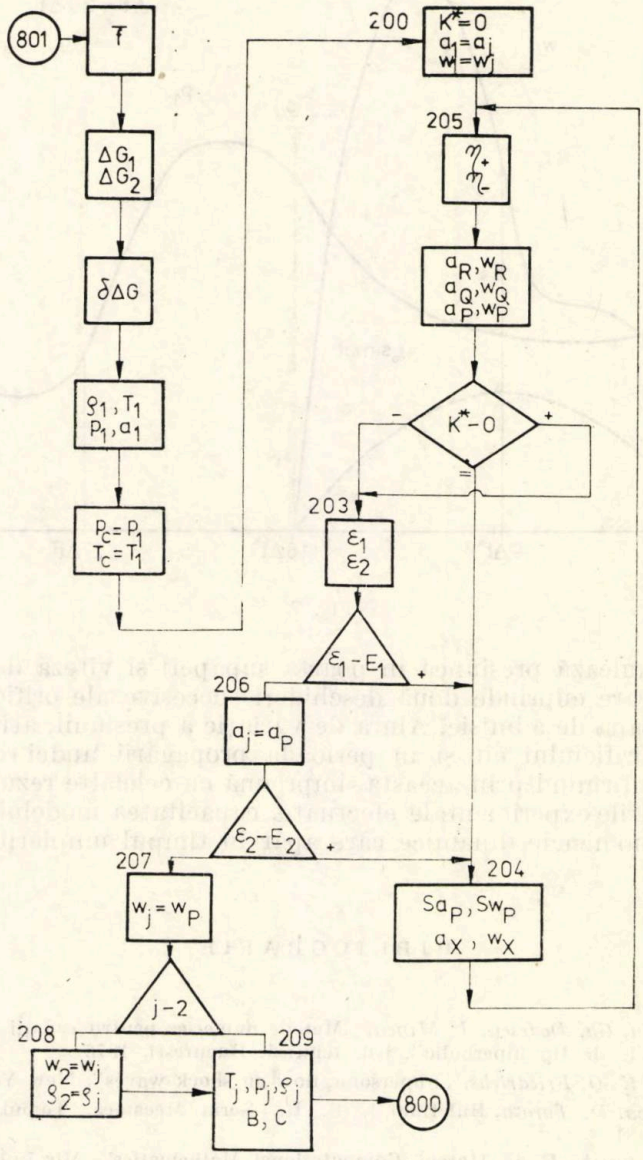


Fig. 6

tocmit pentru rezolvarea modelului fizico-matematic al procesului de schimbare a gazelor, [3] și a fost testat [7], în vederea evitării unor eventuale instabilități. O parte din rezultatele obținute sînt prezentate în figura 7, în care au fost reprezentate variația presiunii în primul tronson al conduc-

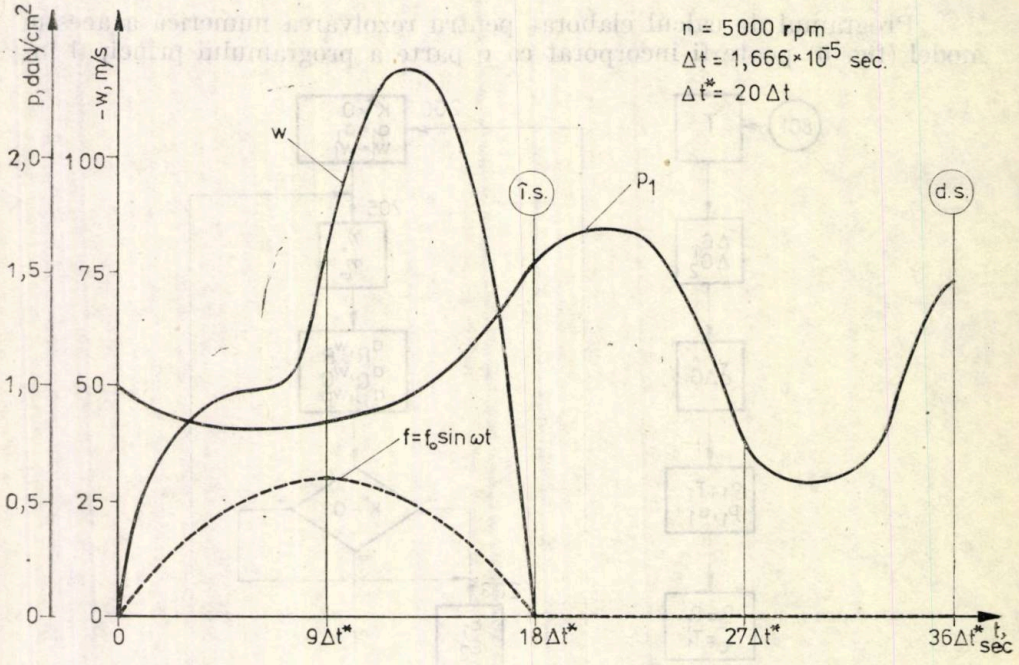


Fig. 7

tei (care simulează presiunea în poarta supapei) și viteza de curgere, pe o perioadă care cuprinde două deschideri succesive ale orificului care simulează supapa de admisie. Alura de variație a presiunii, atît în perioada deschiderii orificiului cît și în perioada propagării undei reziduale, este coerentă, confirmînd prin aceasta, împreună cu celelalte rezultate precum și cu verificările experimentale efectuate, capacitatea modelului propus de a descrie fenomenele dinamice care apar în timpul umplerii.

BIBLIOGRAFIE

1. *N. Racoveanu, Gh. Dodescu, I. Mincu*, „Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic", Ed. tehnică, București, 1976
2. *R. Conrant, K. O. Friedrichs*, „Supersonic flow on shock waves", New York, Wiley, 1948
3. *S. Minculescu, D. Taraza*, Buletinul I. P. B., Seria Mecanică, Tomul XLIII, nr. 1, 1981.
4. *B. P. Demidovich, I. A. Maron* „Computational Mathematics", Mir Publishers, Moscow, 1976.

5. *N. Piskunov*, „Differential and Integral Calculus", Mir Publishers, Moscow, 1969.
6. *S. Godounov, et coll.*, „Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz", Edition Mir, Moscou, 1979.
7. *Ș. Minculescu* „Contribuție la studiul fenomenelor dinamice asociate umplerii la motorul în 4 timpi, cu aspirație", Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1983.

A Gas-Flow Model Considering Wave Propagation in I. C. Engine Intake System

A physical model is developed as well as the mathematical solution for the flow through the intake system of a 4-stroke aspirated engine, considering the dynamic phenomena.

The flow — chart of the FORTRAN program and some results using this program, independently or in correlation with global cycle simulation, [3], are also presented.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1984—1985

Șerban Corneliu Minculescu — Contribuții la studiul fenomenelor dinamice asociate umple la motorul în patru timpi, cu aspirație. (25.I.1984).

Dan Muraru — Cercetări și soluții constructive pentru îmbunătățirea comportării tribologice a ghidajelor de mașini-unelte pentru deplasări rectilinii. (4.V.1984).

Emilian Baciu — Cercetări privind uzura și durabilitatea pompelor hidraulice folosite la acționarea hidrostatică a mașinilor agricole. (25.V.1984)

Costin Emil Dobre — Contribuții la studiul influenței unor factori funcționali și constructivi asupra arderii stratificate în motorul cu aprindere prin scînteie. (2.VI.1984)

Ioan Iulian Irimie — Studiul termodinamic și hidrodinamic al proceselor de curgere în rețelele miniere de transport a aerului comprimat. (5.VI.1985)

Ioan Mircea Oprean — Studiul interacțiunii camă-arc de supapă la motoarele cu aprindere prin scînteie de turație ridicată. (21.VII.1984)

Gheorghe Valeriu Banu — Îmbunătățirea performanțelor micromotoarelor pneumatice rotative pas cu pas. (1.XII.1984)

Aurel Ciocîrlea Vasilescu — Cercetări privind studiul și perfecționarea aparatelor pentru măsurarea debitelor. (1.XII.1984)

Gheorghe Ene — Dinamica materialelor granulare corelată cu dinamica particulei individuale cu aplicații la ciururile cu ruliu. (19.XII.1984)

Grigore Octavian Dontu — Perfecționarea sistemelor cu laser pentru îmbunătățirea performanțelor tehnologiilor specifice mecanicii fine. (22.II.1985)

Liviu Iordăchescu — Contribuții la studiul arderii în motorul cu aprindere prin scînteie, alimentat cu amestecuri foarte sărace. (23.II.1985)

Dumitru Nedelcu — Contribuții privind funcționarea unui motor cu aprindere prin comprimare de tip M, cu injecție de emulsie metanol-motorină. (30.III.1985)

Ion Alexandru Păvăloiosu — Contribuții la modelarea transferului de căldură în camerele de ruere ale motoarelor rachetă cu combustibil solid. (25.IV.1985)

C. 1580 I.P. Informația

40.480